Wiederholungsserie

1. Zeige durch Kopfrechnen, dass die folgende reelle Matrix invertierbar ist:
$$A := \begin{pmatrix} 2015 & 2344 & 1234 & 1990 \\ 2124 & 4123 & 1990 & 3026 \\ 1230 & 2014 & 9095 & 1230 \\ 1262 & 1776 & 1880 & 3907 \end{pmatrix}$$

2. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass es einen eindeutigen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $L_A|_U = \mathrm{id}_U$ und $L_A(U^\perp) \subset U^\perp$ ist und $L_A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser $0 \in U^\perp$ hat.

3. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_m$ und $w_1, \ldots, w_m$ Vektoren in V, sodass für alle i, j gilt:
$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle.$$
Zeige, dass ein Endomorphismus $f : V \to V$ existiert mit $f(v_i) = w_i$ für alle i.

4. (*Hermitesche Polynome*) Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum aller komplexen Polynome in einer Variablen x, und betrachte die Endomorphismen
$$\begin{aligned} D&\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], \quad u \mapsto Du := u_x := \tfrac{du}{dx}, \\ P&\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], \quad u \mapsto Pu := -u_x + xu, \\ L&\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], \quad u \mapsto Lu := -u_{xx} + xu_x. \end{aligned}$$
   (a) Zeige, dass
   $$(u, v) \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)} v(x) e^{-x^2/2}\, dx$$
   ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[x]$ definiert.
   (b) Zeige, dass P zu D adjungiert ist bezüglich $(\cdot, \cdot)$.
   (c) Zeige, dass L selbstadjungiert ist bezüglich $(\cdot, \cdot)$.
   (d) Zeige: Für jeden Eigenvektor u von L ist auch Pu ein Eigenvektor. (Deshalb heisst P auch *Erzeugungs-Operator* für L.)
   (e) Zeige, dass für jede natürliche Zahl n ein eindeutiges normiertes Polynom h_n vom Grad n existiert, welches ein Eigenvektor von L ist. Dieses heisst das *n-te Hermitesche Polynom*.
   (f) Zeige für alle n die Formel
   $$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$
   (g) Berechne die Skalarprodukte (h_n, h_m) für alle $n, m \geqslant 0$. (*Hinweis:* Verwende das Gauss-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.)

Bemerkung: Die Hermiteschen Polynome sind wichtig für Anwendungen in der Physik. Sie tauchen zum Beispiel in der quantenmechanischen Beschreibung des harmonischen Oszillators auf, siehe:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)`

5. Sei M die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis der quadratischen Form
$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$
Zeige, dass M positiv definit ist und berechne ihre Cholesky-Zerlegung.

6. Entscheide, welche der folgenden reellen symmetrischen Matrizen positiv definit sind, und führe für diese die Matrixzerlegungen aus §10.17 der Vorlesung aus:
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Sei A eine positiv-definite reelle symmetrische $n \times n$-Matrix.
   (a) Ist A^2 positiv definit?
   (b) Ist A^{-1} positiv definit?

8. Zeige, dass jede symmetrische komplexe Matrix mit positiv definitem Realteil invertierbar ist.

9. Sei $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ und betrachte die reelle 5×5-Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 1. \end{pmatrix}$$
Bestimme eine orthogonale Matrix U, sodass $U^{-1}AU$ Diagonalgestalt hat.

*10. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $0 < n < \infty$, und sei $f : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus mit Eigenwerten $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Zeige:
$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \,\middle|\, 0 \neq x \in V \right\},$$
$$\lambda_n = \max \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \,\middle|\, 0 \neq x \in V \right\}.$$
Zeige allgemeiner das Min-Max-Prinzip: Für jedes $r = 1, \ldots, n$ gilt
$$\lambda_r = \min \left\{ \max_{x \in W \smallsetminus \{0\}} \left(\frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right) \,\middle|\, W \subseteq V,\ \dim W = r \right\}.$$

11. Seien V ein reeller Vektorraum der Dimension n und β eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V mit der Signatur (p, q). Bestimme die maximale Dimension eines Unterraums $U \subset V$ mit $\beta|_{U \times U} = 0$.

*12. Der *Index* einer reellen symmetrischen $n \times n$-Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ der jeweiligen Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$ ist definiert als

$$\operatorname{Ind}(A) := \sum_{i:\, \lambda_i > 0} m_i - \sum_{i:\, \lambda_i < 0} m_i,$$

also als die Anzahl positiver minus die Anzahl negativer Eigenwerte von A, gezählt mit Vielfachheiten.

Seien A und B zwei symmetrische $n \times n$-Matrizen mit

$$x^T A x \leqslant x^T B x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\operatorname{Ind}(A) \leqslant \operatorname{Ind}(B)$ ist.

13. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

(a) Zeige oder widerlege: Für jeden invertierbaren Endomorphismus $f\colon V \to V$ existiert ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V, für welches f orthogonal ist.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$ und $f = L_A$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Finde, falls möglich, eine 3×3-Matrix M, sodass $(x, y) \mapsto x^T M y$ ein Skalarprodukt auf V ist, bezüglich das der Endomorphismus L_A orthogonal ist.

14. Seien $R, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zwei nicht-triviale Drehungen um je eine Gerade durch den Ursprung. Beweise die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) R und S kommutieren, das heisst, es gilt $RS = SR$.

(b) R und S haben entweder dieselbe Drehachse oder sind Rotationen um 180° bezüglich orthogonaler Drehachsen.

15. Sei f ein Automorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V. Zeige: Ist f selbstadjungiert, bzw. unitär, bzw. normal, so haben f^* und f^{-1} dieselbe Eigenschaft.

16. Sei V der euklidische Raum der reellen 2×2-Matrizen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{Spur}(A^T B).$$

Für $u \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $F_u : V \to V$ definiert durch

$$F_u(A) := A^T - u \cdot (\operatorname{Spur} A) \cdot I_2$$

(a) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u selbstadjungiert?

(b) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u orthogonal?

(c) Sei $u \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass F_u sowohl selbstadjungiert als auch orthogonal ist. Welche Abbildung ist dann $F_u \circ F_u$?

17. Beweise oder widerlege: Jeder normale Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums ist die Komposition eines selbstadjungierten mit einem unitären Endomorphismus.

18. Wir betrachten ein korrekt ausgefülltes Sudokugitter als eine 9×9 Matrix S mit Einträgen in $\{1, 2, \ldots, 9\} \subset \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind für alle, für manche, für kein S korrekt?

    (a) Die Zahl 45 ist ein Eigenwert von S.

    (b) Die Determinante von S ist durch 9 teilbar.

    (c) Der Vektor $(1, \ldots, 9)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von S.

    *(d) Die Determinante von S ist positiv.

19. Für welche reellen Zahlen a und b existiert eine reelle 2×2-Matrix A mit

$$A^{20} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}?$$

20. Für welche der folgenden Gleichungen existiert eine reelle Matrix X, die sie erfüllt?

    (a) $X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

    (b) $2X^5 + X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

    (c) $X^6 + 2X^4 + 10X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

    (d) $X^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

21. Was sind die Möglichkeiten für den Rang einer reellen 7×7-Matrix mit Minimalpolynom X^2?

22. Sei K ein Körper. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, so dass die Jordan-Normalform jedes Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums durch das charakteristische Polynom zusammen mit dem Minimalpolynom eindeutig bestimmt ist.

23. Wir betrachten alle reellen symmetrischen 3×3-Matrizen, welche die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektoren besitzen.

    (a) Was lässt sich über die Eigenwerte λ_i zu v_i aussagen?

(b) Gib eine Parametrisierung der Menge aller dieser Matrizen.

*24. Zeige: Für jede nilpotente $n \times n$-Matrix N über K ist $\exp(N)$ ähnlich zu $I_n + N$.

*25. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix über K und betrachte den Unterraum

$$U(A) := \{B \in \mathrm{Mat}_{nn}(K) : AB = BA\}\,.$$

(a) Finde eine Basis von $U(A)$ für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Zeige: $n \leqslant \dim U(A) \leqslant n^2$.

(c) In welchen Fällen gilt Gleichheit in (b)?

26. Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix, deren Eigenwerte alle den Betrag < 1 haben. Beweise, dass die Matrix $I_n - A$ invertierbar ist und berechne ihre Inverse.

27. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & -8 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.
Bestimme die Jordansche Normalform von A und von B, sowie zugehörige Jordan-Basen von $\mathbb{R}^5$.

*28. Seien f und g Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass die Endomorphismen fg und gf dasselbe charakteristische Polynom haben.

*29. Sei $T : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass gilt

$$\forall v, w \in V\colon\ \langle v, w\rangle = 0 \implies \langle T(v), T(w)\rangle = 0\,.$$

Zeige, dass eine unitäre Abbildung $S : V \to V$ und $c \in \mathbb{C}$ existieren mit $T = c \cdot S$.

Hinweis: Untersuche den Endomorphismus $f := T^* \circ T$.

*30. Eine *reelle homogene Form vom Grad d* in n Variablen ist ein Ausdruck der Form

$$q(x) \;=\; \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \geqslant 0 \\ \sum_\nu i_\nu = d}} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und reellen Koeffizienten $a_{i_1,\ldots,i_n}$. Die Menge all dieser ist ein reeller Vektorraum $V_{d,n}$. Zeige, dass die *Restitutions-Abbildung*

$$\mathrm{Res}\colon\ \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to V_{d,n},\ \ \varphi \mapsto q_\varphi(x) := \varphi(x, \ldots, x).$$

ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Untersuche die *Polarisations-Abbildung*

$$\mathrm{Pol}\colon V_{d,n} \to \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ q(x) \mapsto \varphi_q$$

mit

$$\varphi_q(v_1, \ldots, v_d) \ := \ \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \ \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} q(t_1 v_1 + \cdots + t_d v_d)$$

für alle $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$ und für reelle Variablen $t_1, \ldots, t_d$.

31. Betrachte zwei K-Vektorräume V, W sowie einen Unterraum $V' \subset V$.

    (a) Konstruiere einen natürlichen injektiven Homomorphismus

    $$V' \otimes_K W \ \hookrightarrow V \otimes_K W.$$

    Identifiziere $V' \otimes_K W$ mit seinem Bild.

    (b) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus

    $$(V \otimes_K W)/(V' \otimes_K W) \ \cong \ (V/V') \otimes_K W.$$

*32. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und p eine natürliche Zahl. Ein Element von $\bigwedge^p V$ der Form $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ für Vektoren $v_1, \ldots, v_p \in V$ heisst *rein*. Betrachte ein beliebiges nicht-verschwindendes Element $\alpha \in \bigwedge^p V$. Zeige: Der Kern der Abbildung

$$f_\alpha \colon V \to \bigwedge^{p+1} V,\ v \mapsto v \wedge \alpha$$

hat Dimension $\leqslant p$, und es gilt Gleichheit genau dann, wenn α rein ist.

33. Betrachte eine 4×2-Matrix $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant 4,\, 1 \leqslant j \leqslant 2}$ und bezeichne ihre 2×2-Minoren mit $M_{ij} := \det \left(\begin{smallmatrix} m_{i1} & m_{i2} \\ m_{j1} & m_{j2} \end{smallmatrix}\right)$ für alle $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

    Existiert eine reelle 4×2-Matrix M mit $(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})$ gleich

    (a) $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$?

    (b) $(3, 4, 5, 6, 7, 8)$?

    (c) $(1, 5, 3, 3, 2, 1)$?

    (*Hinweis:* Rechne in $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$!)

34. Zeige: Für je zwei K-Vektorräume V und W und für jedes $k \geqslant 0$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\bigboxplus_{i+j=k} \Big(\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W \Big) \ \cong \ \bigwedge^k (V \boxplus W)\,.$$