Musterlösung Wiederholungsserie

1. Zeige durch Kopfrechnen, dass die folgende reelle Matrix invertierbar ist:

$$A := \begin{pmatrix} 2015 & 2344 & 1234 & 1990 \\ 2124 & 4123 & 1990 & 3026 \\ 1230 & 2014 & 9095 & 1230 \\ 1262 & 1776 & 1880 & 3907 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Determinante ist definiert durch eine universelle polynomiale Formel mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Da alle Einträge von A in $\mathbb{Z}$ liegen, ist also auch $\det(A)$ in $\mathbb{Z}$. Weiter sind alle Diagonaleinträge von A ungerade, und alle übrigen Einträge gerade. Also ist A modulo 2 kongruent zu der Einheitsmatrix I_4. Die universelle Formel für die Determinante impliziert nun, dass $\det(A)$ modulo 2 kongruent ist zu $\det(I_4) = 1$. Also ist $\det(A)$ eine ungerade ganze Zahl, und deshalb sicher ungleich Null in $\mathbb{R}$. Somit ist A als reelle Matrix invertierbar.

2. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass es einen eindeutigen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $L_A|_U = \mathrm{id}_U$ und $L_A(U^\perp) \subset U^\perp$ ist und $L_A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser $0 \in U^\perp$ hat.

Lösung: Die Menge $U := \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = u\}$ der Fixpunkte von L_A ist der Kern der linearen Abbildung $L_A - \mathrm{id}$ und daher ein Unterraum. (Falls A den Eigenwert 1 hat, ist dies der zugehörige Eigenraum.) Nach Konstruktion gilt dann $L_A|_U = \mathrm{id}_U$, und wegen $U \cap U^\perp = \{0\}$ besitzt $L_A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser 0.

Sodann betrachte einen Vektor $w \in U^\perp$. Da A orthogonal ist, gilt für alle $u \in U$

$$\langle u, Aw \rangle \;=\; \langle Au, Aw \rangle \;=\; \langle u, w \rangle \;=\; 0,$$

wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist. Somit ist $Aw \in U^\perp$, und daher $L_A(U^\perp) \subset U^\perp$. Also erfüllt U alle verlangten Bedingungen.

Sei nun W ein beliebiger Teilraum mit den Eigenschaften aus der Aufgabe. Die Bedingung $A|_W = \mathrm{id}_W$ bedeutet dann, dass W aus Fixpunkten besteht, also in U enthalten ist. Die Bedingung, dass $L_A|_{W^\perp}$ keine Fixpunkte ausser 0 hat, bedeutet, dass $U \cap W^\perp = \{0\}$ ist. Nun ist aber $W' := U \cap W^\perp$ das orthogonale Komplement von W als Unterraum von U. Da U ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum ist, ist dann W wieder das orthogonale Komplement von W' als Unterraum von U. Wegen $W' = \{0\}$ impliziert dies $W = U$. Daher ist U durch die genannten Bedingungen eindeutig bestimmt.

3. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_m$ und $w_1, \ldots, w_m$ Vektoren in V, sodass für alle i, j gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle.$$

Zeige, dass ein Endomorphismus $f : V \to V$ existiert mit $f(v_i) = w_i$ für alle i.

Lösung: Betrachte zunächst eine beliebige Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, m\}$. Die Vektoren v_i für alle $i \in I$ sind linear unabhängig genau dann, wenn ihre Gramsche

Determinante $\det\big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j\in I}$ ungleich Null ist. Nach Voraussetzung ist diese Determinante aber gleich $\det\big(\langle w_i, w_j\rangle\big)_{i,j\in I}$, und somit ungleich Null genau dann, wenn die Vektoren w_i für alle $i \in I$ linear unabhängig sind.

Unter allen Teilmengen mit den genannten äquivalenten Eigenschaften sei nun I eine maximale. Nach Umordnen der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ und $w_1, \ldots, w_m$ dürfen wir $I = \{1, \ldots, n\}$ annehmen für ein $0 \leqslant n \leqslant m$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine maximales linear unabhängiges Teilsystem von $(v_1, \ldots, v_m)$ und somit eine Basis des Unterraums $V' := \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$. Aus demselben Grund ist $(w_1, \ldots, w_n)$ eine maximales linear unabhängiges Teilsystem von $(w_1, \ldots, w_m)$ und somit eine Basis des Unterraums $V'' := \langle w_1, \ldots, w_m\rangle$.

Betrachte den eindeutigen Isomorphismus $f'\colon V' \to V''$ mit $f'(v_i) = w_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. *Behauptung:* Für diesen gilt auch $f'(v_\ell) = w_\ell$ für alle $1 \leqslant \ell \leqslant m$.

Betrachte dafür die Gramsche Matrix $M := (g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} := \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ und bezeichne ihre Inverse mit $M^{-1} = (g^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Schreibe $v_\ell = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ mit eindeutigen $a_i \in \mathbb{R}$. Für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt dann

$$\langle v_\ell, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n a_i g_{ij},$$

also nach Multiplikation mit g^{jk} und anschliessendem Aufsummieren auch

$$\sum_{j=1}^n \langle v_\ell, v_j\rangle g^{jk} = \sum_{i,j=1}^n a_i g_{ij} g^{jk} = \sum_i^n a_i (MM^{-1})_{i,k} = a_k$$

für alle $k = 1, \ldots, n$. Es gilt daher

$$v_\ell = \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \langle v_\ell, v_j\rangle g^{jk}\Big) v_k\,.$$

Da gleichzeitig $M = \big(\langle w_i, w_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ ist, zeigt man analog

$$w_\ell = \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \langle w_\ell, w_j\rangle g^{jk}\Big) w_k\,.$$

Zusammen folgt daraus unter Benutzung von $\langle v_\ell, v_j\rangle = \langle w_\ell, w_j\rangle$

$$\begin{aligned}
f'(v_\ell) &= f\left(\sum_{k=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \langle v_\ell, v_j\rangle g^{jk}\Big) v_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \langle v_\ell, v_j\rangle g^{jk}\Big) f'(v_k) \\
&= \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \langle w_\ell, w_j\rangle g^{jk}\Big) w_k \quad = \quad w_\ell,
\end{aligned}$$

wie behauptet.

Sei schliesslich $f\colon V \to V$ eine beliebige Fortsetzung von f'. Zum Beispiel wähle ein Komplement U' mit $V = V' \oplus U'$ und setze $f(v' + u') := f'(v')$ für alle $v' \in V'$ und alle $u' \in U'$. Jede Fortsetzung hat die gewünschte Eigenschaft.

4. (*Hermitesche Polynome*) Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum aller komplexen Polynome in einer Variablen x, und betrachte die Endomorphismen

$$\begin{aligned} D\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], &\quad u \mapsto Du := u_x := \tfrac{du}{dx}, \\ P\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], &\quad u \mapsto Pu := -u_x + xu, \\ L\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], &\quad u \mapsto Lu := -u_{xx} + xu_x. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass

$$(u, v) \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)} v(x) e^{-x^2/2}\, dx$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[x]$ definiert.

(b) Zeige, dass P zu D adjungiert ist bezüglich $(\cdot,\cdot)$.

(c) Zeige, dass L selbstadjungiert ist bezüglich $(\cdot,\cdot)$.

(d) Zeige: Für jeden Eigenvektor u von L ist auch Pu ein Eigenvektor. (Deshalb heisst P auch *Erzeugungs-Operator* für L.)

(e) Zeige, dass für jede natürliche Zahl n ein eindeutiges normiertes Polynom h_n vom Grad n existiert, welches ein Eigenvektor von L ist. Dieses heisst das *n-te Hermitesche Polynom*.

(f) Zeige für alle n die Formel

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

(g) Berechne die Skalarprodukte (h_n, h_m) für alle $n, m \geqslant 0$. (*Hinweis:* Verwende das Gauss-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.)

Bemerkung: Die Hermiteschen Polynome sind wichtig für Anwendungen in der Physik. Sie tauchen zum Beispiel in der quantenmechanischen Beschreibung des harmonischen Oszillators auf, siehe:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)`

Lösung:

(a) Aus der Analysis folgt, dass das Integral (u, v) für alle $u, v \in \mathbb{C}[x]$ wohldefiniert und endlich ist. Unter Verwendung der Grundeigenschaften des Integrals prüft man direkt, dass $(\cdot,\cdot)$ eine hermitesche Sesquilinearform ist. Betrachte nun ein nicht-verschwindendes Polynom $u \in \mathbb{C}[x]$. Dann hat die zugehörige Polynomfunktion höchstens endlich viele Nullstellen, und dasselbe gilt für die Funktion $x \mapsto |u(x)|^2 e^{-x^2/2}$. Da diese stetig und $\geqslant 0$ ist, folgt ebenfalls aus der Analysis, dass ihr Integral

$$(u, u) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 e^{-x^2/2} \ > \ 0$$

ist. Somit ist die Paarung $(\cdot,\cdot)$ positiv definit, also ein Skalarprodukt.

(b) Für alle $u, v \in \mathbb{C}[x]$ gilt $\lim_{x\to\pm\infty} u(x)v(x)e^{-x^2/2} = 0$. Aus partieller Integration folgt daher

$$\begin{aligned}(Du, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx}(x) \cdot v(x)e^{-x^2/2}\,dx \\ &= u(x)v(x)e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\frac{d}{dx}\Big(v(x)e^{-x^2/2}\Big)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\cdot\big(v_x(x) - xv(x)\big)\cdot e^{-x^2/2}\,dx \\ &= -(u, v_x - xv) \;=\; (u, Pv).\end{aligned}$$

Daher ist P zu D adjungiert.

(c) Für jedes $u \in \mathbb{C}[x]$ gilt nach Definition

$$PDu \;=\; P(u_x) \;=\; -u_{xx} + xu_x \;=\; Lu.$$

Aus (b) folgt daher $L = PD = D^*D$. Somit ist

$$L^* \;=\; (D^*D)^* \;=\; D^*(D^*)^* \;=\; D^*D \;=\; L;$$

also ist L selbstadjungiert.

(d) Zunächst berechnen wir für jedes $u \in \mathbb{C}[x]$:

$$(*) \qquad DPu \;=\; D(-u_x + xu) \;=\; -u_{xx} + xu_x + u \;=\; Lu + u.$$

Für jeden Eigenvektor $u \in \mathbb{C}[x]$ von L zum Eigenwert λ folgt daraus

$$LPu \overset{(c)}{=} PDPu \overset{(*)}{=} P(Lu + u) \;=\; P(\lambda u + u) \;=\; (\lambda + 1)\cdot Pu.$$

Andererseits ist $u \neq 0$ und folglich $\deg_x(xu) = \deg_x(u) + 1 > \deg_x(u_x)$. Also hat $Pu = -u_x + xu$ den Grad $\deg_x(u) + 1$ und ist daher ebenfalls $\neq 0$. Somit ist Pu ein Eigenvektor von L zum Eigenwert $\lambda + 1$.

(e) Für das konstante Polynom $h_0 := 1$ gilt $(h_0)_x = 0$ und folglich $Lh_0 = 0$. Daher ist h_0 ein Eigenvektor von L zum Eigenwert 0. Mit (d) folgt durch Induktion, dass $h_n := P^n h_0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert n ist für jedes $n \geqslant 0$. Mit derselben Rechnung wie in (d) zeigt man ausserdem durch Induktion, dass jedes h_n normiert vom Grad n ist. Die Polynome h_n haben also die gesuchten Eigenschaften. Ausserdem ist die Menge $\{h_n \mid n \geqslant 0\}$ eine Basis von $\mathbb{C}[x]$.

Sei nun $k \in \mathbb{C}[x]$ ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad n, das ein Eigenvektor von L zum Eigenwert λ ist. Dann ist $k = \sum_{m=0}^{n} a_m h_m$ mit gewissen Konstanten $a_m \in \mathbb{C}$ und $a_n = 1$. Daraus folgt

$$\sum_{m=0}^{n} a_m\lambda h_m \;=\; \lambda k \;=\; Lk \;=\; \sum_{m=0}^{n} a_m Lh_m \;=\; \sum_{m=0}^{n} a_m m h_m,$$

und somit $a_m\lambda = a_m m$ für alle $0 \leqslant m \leqslant n$. Für $m = n$ folgt daraus $\lambda = n$, und für alle $m < n$ folgt daraus $a_m = 0$. Also ist $k = h_n$, wie zu zeigen war.

(f) Wir verwenden Induktion über n. Für $n = 0$ gilt die gesuchte Gleichung. Wenn sie für ein $n \geqslant 0$ gilt, so folgt aus der Konstruktion von h_n

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= -\tfrac{d}{dx}h_n + xh_n \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} -\tfrac{d}{dx}\Big((-1)^n e^{x^2/2}(\tfrac{d}{dx})^n(e^{-x^2/2})\Big) + x\Big((-1)^n e^{x^2/2}(\tfrac{d}{dx})^n(e^{-x^2/2})\Big) \\ &= (-1)^{n+1}e^{x^2/2}(\tfrac{d}{dx})^{n+1}(e^{-x^2/2}), \end{aligned}$$

also gilt die Gleichung auch für $n+1$.

(g) Da L selbstadjungiert ist, sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten von L zueinander orthogonal. Daraus folgt $(h_n, h_m) = 0$ für alle $n \neq m$. Sodann ist

$$(h_0, h_0) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \;=\; \sqrt{2\pi}\,.$$

Für beliebiges n rechnen wir

$$\begin{aligned} (h_{n+1}, h_{n+1}) &\overset{(e)}{=} (Ph_n, Ph_n) \\ &\overset{(b)}{=} (h_n, DPh_n) \\ &\overset{(*)}{=} (h_n, Lh_n + h_n) \\ &\overset{(e)}{=} (h_n, nh_n + h_n) \\ &= (n+1)\cdot(h_n, h_n). \end{aligned}$$

Durch Induktion über n folgt daraus für alle n:

$$(h_n, h_n) \;=\; \sqrt{2\pi}\cdot n!.$$

Ingesamt erhalten wir für alle $n, m \geqslant 0$ somit

$$(h_n, h_m) \;=\; \sqrt{2\pi}\cdot n!\cdot \delta_{nm}\,.$$

Aliter: Durch Taylorentwicklung der Funktion $e^{xt-t^2/2}$ nach t und mit (f) erhält man die Potenzreihenentwicklung

$$e^{xt-t^2/2} \;=\; \sum_{n\geqslant 0} h_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

mit Konvergenzradius ∞. Da alle h_n zueinander orthogonal sind, gilt somit für jedes $t \in \mathbb{R}$,

$$\Big(e^{xt-t^2/2}, e^{xt-t^2/2}\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}(h_n, h_n).$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die linke Seite

$$\begin{aligned} \Big(e^{xt-t^2/2}, e^{xt-t^2/2}\Big) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt-t^2-x^2/2}dx \;=\; e^{t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2xt-2t^2}dx \\ =\; e^{t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac12(x-2t)^2}dx \;&=\; e^{t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac12 y^2}dy \;=\; e^{t^2}\sqrt{2\pi} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2\pi}\,\frac{t^{2n}}{n!}. \end{aligned}$$

Durch Vergleichen des Koeffizienten von t^n erhalten wir somit

$$(h_n, h_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)^2 e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}\cdot n!$$

5. Sei M die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis der quadratischen Form

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Zeige, dass M positiv definit ist und berechne ihre Cholesky-Zerlegung.

Lösung: Die Matrix M ist symmetrisch und charakterisiert durch die Gleichung $q(x) = x^T Mx$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und somit gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ihre Hauptminoren ergeben sich zu

$$\det(1) = 1, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2, \quad \det(M) = 6.$$

Da alle diese positiv sind, ist M positiv definit.

Die Cholesky-Zerlegung von M ist die Lösung der Matrixgleichung $M = R^T R$ durch eine reelle obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit Diagonaleinträgen > 0. Wir rechnen

$$\begin{aligned} R^T R &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} \\ * & a_{12}^2 + a_{22}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} \\ * & * & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir wegen der Symmetrie die Einträge unterhalb der Diagonalen ignorieren können. Durch sukzessives Auflösen erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{1} = 1, \\ a_{12} &= 0/a_{11} = 0, \\ a_{13} &= -1/a_{11} = -1, \\ a_{22} &= \sqrt{2 - a_{12}^2} = \sqrt{2}, \\ a_{23} &= (2 - a_{12}a_{13})/a_{22} = \sqrt{2}, \\ a_{33} &= \sqrt{6 - a_{13}^2 - a_{23}^2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Also ist

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6. Entscheide, welche der folgenden reellen symmetrischen Matrizen positiv definit sind, und führe für diese die Matrixzerlegungen aus §10.17 der Vorlesung aus:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Für beide Matrizen verwenden wir das Hauptminorenkriterium. Weil der zweite Hauptminor von A

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -6$$

negativ ist, ist A nicht positiv definit. Die Hauptminoren von B sind

$$\begin{aligned} \det(B_1) &= \det(2) = 6 > 0, \\ \det(B_2) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0, \\ \det(B_3) &= \det(B) = 4 > 0. \end{aligned}$$

Somit ist B positiv definit. Nun müssen wir eine invertierbare reelle obere Dreiecksmatrix R und eine invertierbare symmetrische reelle Matrix C finden mit $B = R^T R = C^2$. Für R machen wir den Ansatz

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit reellen Koeffizienten a_{ij} und Diagonaleinträgen > 0. Durch sukzessives Auflösen der Matrixgleichung

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} \\ * & a_{12}^2 + a_{22}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} \\ * & * & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix},$$

wobei wir wegen der Symmetrie von B die Einträge unterhalb der Diagonalen ignorieren können, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{2}, \\ a_{12} &= -1/a_{11} = -1/\sqrt{2}, \\ a_{13} &= -1/a_{11} = -1/\sqrt{2}, \\ a_{22} &= \sqrt{2 - a_{12}^2} = \sqrt{3/2}, \\ a_{23} &= (-a_{12}a_{13})/a_{22} = -\sqrt{1/6}, \\ a_{33} &= \sqrt{2 - a_{13}^2 - a_{23}^2} = \sqrt{4/3}. \end{aligned}$$

Also ist

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{1/6} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{pmatrix}.$$

Um C zu finden, diagonalisieren wir die Matrix B durch eine Orthonormalbasis. Das charakteristische Polynom von B ist

$$\begin{aligned}\mathrm{char}_B(X) &= X^3 - 6X^2 + 10X - 4 \\ &= (X-2)\cdot\Big(X-(2+\sqrt{2})\Big)\cdot\Big(X-(2-\sqrt{2})\Big)\end{aligned}$$

Die Eigenräume zu den Eigenwerten 2 und $2+\sqrt{2}$ und $2-\sqrt{2}$ sind jeweils

$$\mathrm{Eig}_2(B) = \mathrm{Kern}(B-2I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}_{2+\sqrt{2}}(B) = \mathrm{Kern}(B-(2+\sqrt{2})I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1 & -1\\ -1 & -\sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}_{2-\sqrt{2}}(B) = \mathrm{Kern}(B-(2-\sqrt{2})I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1 & -1\\ -1 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle .$$

Da B symmetrisch ist, sind die Eigenräume zu unterschiedlichen Eigenwerten von B orthogonal. Also bilden die normalisierten Eigenvektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, und die zugehörige Basiswechselmatrix

$$U := \begin{pmatrix}0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

ist orthogonal. Wir erhalten also die Diagonalisierung

$$B = U\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot U^{-1}.$$

Die Matrix

$$C := U\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2+\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot U^{-1}$$

ist dann symmetrisch und erfüllt $C^2 = B$, wie gewünscht. Um C explizit zu berechnen, setzen wir $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Dann ist $\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}/\alpha$ und somit

$$\begin{aligned}
C &= U \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/\alpha \end{pmatrix} \cdot U^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha/\sqrt{2} & 1/\sqrt{\alpha} \\ 1 & \alpha/2 & 1/(\sqrt{2}\alpha) \\ -1 & \alpha/2 & 1/(\sqrt{2}\alpha) \end{pmatrix} \cdot U^T \\
&= \frac{1}{2\alpha} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \sqrt{2}+\alpha^2 & 1-\alpha^2/\sqrt{2} & 1-\alpha^2/\sqrt{2} \\ 1-\alpha^2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}+\sqrt{2}\alpha+\alpha^2/2 & 1/\sqrt{2}-\sqrt{2}\alpha+\alpha^2/2 \\ 1-\alpha^2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}-\sqrt{2}\alpha+\alpha^2/2 & 1/\sqrt{2}+\sqrt{2}\alpha+\alpha^2/2 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

7. Sei A eine positiv-definite reelle symmetrische $n \times n$-Matrix.

   (a) Ist A^2 positiv definit?

   (b) Ist A^{-1} positiv definit?

   Lösung: Da A reell symmetrisch ist, existiert nach dem Spektralsatz eine orthogonale $n \times n$-Matrix U, so dass $D := U^T AU$ eine Diagonalmatrix ist. Da die positiv-Definitheit unter diesem Basiswechsel invariant ist, ist auch D positiv definit. Also sind alle Diagonaleinträge von D positiv. Insbesondere ist D invertierbar, und sowohl D^2 als auch D^{-1} sind Diagonalmatrizen mit allen Diagonaleinträgen positiv. Somit sind D^2 und D^{-1} symmetrisch und positiv-definit. Schliesslich gilt dann $A = UU^TAUU^T = UDU^T$, und somit sind auch $A^2 = UDU^TUDU^T = UD^2U^T$ und $A^{-1} = UD^{-1}U^T$ symmetrisch und positiv definit. Beide Fragen sind daher mit „Ja“ zu beantworten.

   Aliter: Als positiv-definite reelle symmetrische Matrix ist A invertierbar. Für jeden Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ist daher $Av \neq 0$ und somit

$$v^T A^2 v \;=\; v^T A^T A v \;=\; (Av)^T (Av) \;=\; \|Av\|^2 \;>\; 0,$$

   wobei $\|\ \|$ den Absolutbetrag zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Also ist A^2 positiv definit. Für jeden Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ aber auch $A^{-1}v \neq 0$ und somit

$$v^T A^{-1} v \;=\; v^T A^{-1} A A^{-1} v \;=\; (A^{-1}v)^T A (A^{-1}v) \;=\; \|A^{-1}v\|_A^2 \;>\; 0,$$

   wobei $\|\ \|_A$ den Absolutbetrag zu dem Skalarprodukt $(v, w) \mapsto v^T A w$ bezeichnet. Also ist A^{-1} positiv definit.

8. Zeige, dass jede symmetrische komplexe Matrix mit positiv definitem Realteil invertierbar ist.

   Lösung: Schreibe die Matrix in der Form $A + iB$ für reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen A und B. Dann ist A positiv definit. Nach einem Satz der Vorlesung existiert daher eine invertierbare reelle $n \times n$-Matrix V mit $A = V^T V$. Dann ist auch $(V^{-1})^T B V^{-1}$ reell symmetrisch. Nach dem Spektralsatz existiert darum eine orthogonale Matrix Q, so dass $D := Q^T (V^{-1})^T B V^{-1} Q$ eine reelle Diagonalmatrix ist. Zusammen ist dann $Q^T (V^{-1})^T (A + iB) V^{-1} Q = I_n + iD$ eine Diagonalmatrix mit Realteil I_n. Diese ist also invertierbar; und somit ist auch $A + iB$ invertierbar.

Aliter: Finde zuerst mit dem Spektralsatz eine orthogonale $n \times n$-Matrix R, so dass $R^T AR$ eine Diagonalmatrix ist. Diese ist dann immer noch positiv definit; ihre Diagonaleinträge sind daher positiv. Sei D die aus den positiven Quadratwurzeln dieser Einträge gebildete Diagonalmatrix. Dann gilt $R^T AR = D^2$ und daher $A = (R^{-1})^T D^T DR^{-1} = V^T V$ mit der invertierbaren Matrix $V := DR^{-1}$. Dann fahre fort wie oben.

Aliter 2: Schreibe die Matrix in der Form $A + iB$ für reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen A und B. Dann ist A positiv definit, also invertierbar, und es existiert eine invertierbare symmetrische Matrix C mit $A = C^2$. Folglich ist $A + iB$ invertierbar genau dann wenn $C^{-1}(A + iB)C^{-1} = I_n + iC^{-1}BC^{-1} = I_n + iB'$ invertierbar ist mit $B' := C^{-1}BC^{-1}$. Da B und C symmetrisch sind, sind es auch C^{-1} und B'. Folglich sind alle komplexen Eigenwerte von B' reell. Insbesondere ist $-i$ kein Eigenwert von B', und somit ist $-iI_n + B'$ invertierbar. Damit ist dann auch $i(-iI_n + B') = I_n + iB'$ invertierbar, und folglich auch $A + iB$, wie zu zeigen war.

9. Sei $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ und betrachte die reelle 5×5-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Bestimme eine orthogonale Matrix U, sodass $U^{-1}AU$ Diagonalgestalt hat.

Lösung: Wir erkennen, dass der (i, j)-te Eintrag in A genau dann nicht null ist, wenn i und j beide ungerade oder gerade sind. Bezeichnen wir mit $(e_1, \ldots, e_5)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, dann hat A also in der Basis $(e_2, e_4, e_1, e_3, e_5)$ Blockdiagonalgestalt mit Blöcken der Grössen 2×2 und 3×3.

Um dies als Matrixgleichung auszudrücken, betrachte die Permutationsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zur Permutation

$$1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 4, \quad 4 \mapsto 2, \quad 5 \mapsto 5.$$

Dann ist $B := PAP^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{smallmatrix}\right)$ eine Blockdiagonalmatrix mit den Matrixblöcken

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Wir diagonalisieren zuerst diese separat.

Die Matrix B_1 besitzt die orthogonalen Eigenvektoren $\binom{1}{1}$ und $\binom{1}{-1}$ zu den jeweiligen Eigenwerten 2 und 0. Nach Normalisieren erhalten wir also die Orthonormalbasis $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}\right)$ von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von B_1.

Das charakteristische Polynom der Matrix B_2 ist

$$\mathrm{char}_{B_2}(X) = (X-1)^3 - 3(X-1) - 2 = X^2(X-3)$$

Wir berechnen die Eigenräume

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}_3(B_2) &= \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle, \\ \mathrm{Eig}_0(B_2) &= \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\varepsilon \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Da B_2 symmetrisch ist, sind die Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 und Normalisierung des Eigenvektors zum Eigenwert 3 erhalten wir die Orthonormalbasis

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von B_2. Somit bilden die Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \varepsilon \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^5$ aus Eigenvektoren von B zu den jeweiligen Eigenwerten $2, 0, 2+\varepsilon, 0, 0$. Somit ist die zugehörige Basiswechselmatrix

$$U' := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} & \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2}} & \varepsilon/2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

orthogonal, und nach Konstruktion gilt

$$B = U' \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot U'^{-1}.$$

Da die Permutationsmatrix P orthogonal ist, ist dann auch die Matrix

$$U := P^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2}} & \varepsilon/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

orthogonal, und nach Konstruktion hat

$$U^{-1}AU = U'^{-1}(PAP^{-1})U' = U'^{-1}BU'$$

Diagonalgestalt.

*10. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $0 < n < \infty$, und sei $f : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus mit Eigenwerten $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Zeige:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \middle| 0 \neq x \in V \right\},$$
$$\lambda_n = \max \left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \middle| 0 \neq x \in V \right\}.$$

Zeige allgemeiner das Min-Max-Prinzip: Für jedes $r = 1, \ldots, n$ gilt

$$\lambda_r = \min \left\{ \max_{x \in W \smallsetminus \{0\}} \left(\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right) \middle| W \subseteq V,\ \dim W = r \right\}.$$

Lösung: Wir zeigen direkt das allgemeinere Min-Max Prinzip. Da f selbstadjungiert ist, existiert eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren von f zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Betrachte zuerst einen beliebigen Unterraum $W \subset V$ der Dimension r, und setze $V' := \langle v_r, \ldots, v_n\rangle$. Wegen

$$\begin{aligned} \dim(V' \cap W) &= \dim V' + \dim W - \dim(V' + W) \\ &\geqslant \dim V' + \dim W - \dim(V) \\ &= (n - (r-1)) + r - n \\ &= 1 \end{aligned}$$

existiert dann ein nicht-verschwindender Vektor $x_0 \in W \cap V'$. Schreiben wir $x_0 = \sum_{i=r}^n a_i v_i$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\max_{x \in W \smallsetminus \{0\}} \left(\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right) \geqslant \frac{\langle f(x_0), x_0\rangle}{\langle x_0, x_0\rangle} = \frac{\langle \sum_i a_i \lambda_i v_i, \sum_i a_i v_i\rangle}{\langle x_0, x_0\rangle} = \frac{\sum_i \lambda_i a_i^2}{\sum_i a_i^2} \geqslant \lambda_r.$$

Da $W \subset V$ beliebig war, zeigt dies

$$(*) \qquad \inf_{\substack{W \subset V \\ \dim(W) = r}} \left\{ \max_{x \in W \smallsetminus \{0\}} \left(\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right) \right\} \geqslant \lambda_r\,.$$

Sodann betrachte den Unterraum $V_r := \langle v_1, \ldots, v_r\rangle$ der Dimension r. Für jeden Vektor $x = \sum_{i=1}^r a_i v_i \in V_r \smallsetminus \{0\}$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i^2}{\sum_{i=1}^r a_i^2} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_r a_i^2}{\sum_{i=1}^r a_i^2} = \lambda_r.$$

Durch Variieren von x folgt daraus

$$(**) \qquad \max_{x \in V_r \smallsetminus \{0\}} \left(\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right) \leqslant \lambda_r\,.$$

Dies zeigt, dass das Infimum in $(*)$ durch den Unterraum V_r angenommen wird mit dem Wert λ_r, wie zu zeigen war.

11. Seien V ein reeller Vektorraum der Dimension n und β eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V mit der Signatur (p, q). Bestimme die maximale Dimension eines Unterraums $U \subset V$ mit $\beta|_{U \times U} = 0$.

Lösung: Nach Voraussetzung ist $n = p + q$ und es existiert eine geordnete Basis von V, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von β eine Diagonalmatrix ist mit p Diagonaleinträgen 1 und q Diagonaleinträgen -1. Schreibe diese Basis in der Form $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q$ mit $\beta(v_i, v_i) = 1$ und $\beta(w_i, w_i) = -1$ für alle i.

Behauptung: Die gesuchte maximale Dimension ist $m := \min\{p, q\}$.

Betrachte zuerst einen beliebigen Unterraum U der Dimension $> p$. Setze $U_- := \langle w_1, \ldots, w_q \rangle$; aus der Dimensionsformel für Durchschnitte folgt dann

$$\begin{aligned} \dim(U \cap U_-) &= \dim(U) + \dim(U_-) - \dim(U + U_-) \\ &\geqslant \dim(U) + \dim(U_-) - \dim(V) \\ &> p + q - n = 0. \end{aligned}$$

Also existiert ein von Null verschiedener Vektor $u \in U \cap U_-$. Wegen $u \in U_-$ gilt für diesen $\beta(u, u) < 0$. Also ist $\beta|_{U \times U} \neq 0$.

Betrachte sodann einen beliebigen Unterraum U der Dimension $> q$. Setze $U_+ := \langle v_1, \ldots, v_p \rangle$ und rechne

$$\begin{aligned} \dim(U \cap U_+) &= \dim(U) + \dim(U_+) - \dim(U + U_+) \\ &\geqslant \dim(U) + \dim(U_+) - \dim(V) \\ &> q + p - n = 0. \end{aligned}$$

Also existiert ein von Null verschiedener Vektor $u \in U \cap U_+$. Wegen $u \in U_+$ gilt für diesen $\beta(u, u) > 0$. Also ist $\beta|_{U \times U} \neq 0$.

Insgesamt ist somit $\beta|_{U \times U} \neq 0$ für jeden Unterraum U der Dimension $> m$. Die gesuchte maximale Dimension ist also $\leqslant m$.

Schliesslich setze $u_i := v_i + w_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$. Dann gilt

$$\beta(u_i, u_i) = \beta(v_i + w_i, v_i + w_i) = 1 + 0 + 0 - 1 = 0,$$

und für alle $1 \leqslant i, j \leqslant m$ mit $i \neq j$ gilt

$$\beta(u_i, u_j) = \beta(v_i + w_i, v_j + w_j) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Für beliebige Koeffizienten $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ folgt dann

$$\beta\Bigg(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j u_j\Bigg) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \beta(u_i, u_j) = 0.$$

Mit $U := \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ gilt also $\beta|_{U \times U} = 0$. Da die u_i linear unabhängig sind, gilt weiter $\dim(U) = m$. Die gesuchte maximale Dimension ist also $\geqslant m$.

*12. Der *Index* einer reellen symmetrischen $n \times n$-Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ der jeweiligen Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$ ist definiert als

$$\mathrm{Ind}(A) := \sum_{i:\, \lambda_i > 0} m_i - \sum_{i:\, \lambda_i < 0} m_i,$$

also als die Anzahl positiver minus die Anzahl negativer Eigenwerte von A, gezählt mit Vielfachheiten.

Seien A und B zwei symmetrische $n \times n$-Matrizen mit

$$x^T A x \leqslant x^T B x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\mathrm{Ind}(A) \leqslant \mathrm{Ind}(B)$ ist.

Lösung: Sei a bzw. a' die Anzahl positiver bzw. negativer Eigenwerte von A, und sei b bzw. b' die Anzahl positivier bzw. negativer Eigenwerte von B, jeweils gezählt mit Vielfachheiten.

Sei U die Summe aller Eigenräume von A zu positiven Eigenwerten. Dann ist die Einschränkung $L_A|_U$ positiv definit. Für alle $x \in U \smallsetminus \{0\}$ gilt also $x^T B x \geqslant x^T A x > 0$. Mit §10.15 der Zusammenfassung folgt $b \geqslant \dim(U) = a$.

Sei U' die Summe aller Eigenräume von B zu negativen Eigenwerten. Dann ist die Einschränkung $L_B|_{U'}$ negativ definit. Für alle $x \in U' \smallsetminus \{0\}$ gilt also $x^T A x \leqslant x^T B x < 0$. Mit §10.15 der Zusammenfassung folgt $a' \geqslant \dim(U') = b'$.

Beide Aussagen zusammen ergeben dann $\mathrm{Ind}(B) = b - b' \geqslant a - a' = \mathrm{Ind}(A)$.

13. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

(a) Zeige oder widerlege: Für jeden invertierbaren Endomorphismus $f\colon V \to V$ existiert ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V, für welches f orthogonal ist.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$ und $f = L_A$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Finde, falls möglich, eine 3×3-Matrix M, sodass $(x, y) \mapsto x^T M y$ ein Skalarprodukt auf V ist, bezüglich das der Endomorphismus L_A orthogonal ist.

Lösung:

(a) Im Fall $\dim(V) = 0$ ist jeder Endomorphismus die Identität und folglich orthogonal; insbesondere gilt also die Aussage.

Im Fall $\dim(V) > 0$ betrachte den Endomorphismus $f : V \to V$, $v \mapsto 2v$. Für jedes Skalarprodukt auf V und jeden Vektor $v \in V \smallsetminus \{v\}$ gilt dann $\langle v, v\rangle \neq 0$ und folglich

$$\langle f(v), f(v)\rangle = \langle 2v, 2v\rangle = 4\langle v, v\rangle \neq \langle v, v\rangle.$$

Somit ist f nicht orthogonal. Die Aussage ist daher falsch im Fall $\dim(V) > 0$.

(b) Ist L_A orthogonal bezüglich ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten von L_A zueinander orthogonal. Wir bestimmen daher zuerst die Eigenräume von L_A. Dafür berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\operatorname{char}_A(X) = X^3 + X^2 - X - 1 = (X-1)\cdot(X+1)^2.$$

Die Eigenräume zu den Eigenwerten 1 und -1 ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\operatorname{Eig}_1(A) &= \operatorname{Kern}(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\right\rangle\\ \operatorname{Eig}_{-1}(A) &= \operatorname{Kern}(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle.\end{aligned}$$

Also hat L_A bezüglich der geordneten Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

die Darstellungsmatrix

$${}_B[L_A]_B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Nun ist aber L_A genau dann orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$, wenn seine Darstellungsmatrix bezüglich einer *Orthonormalbasis bezüglich* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine orthogonale Matrix ist. Da ${}_B[L_A]_B$ bereits orthogonal ist, genügt es also, das Skalarprodukt so zu wählen, dass B eine Orthonormalbasis ist. Dies bedeutet, dass die Darstellungsmatrix von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezüglich B die Einheitsmatrix ist.
Das Skalarprodukt $\langle x,y\rangle = x^T M y$ hat bezüglich der Standardbasis b von $\mathbb{R}^3$ die Darstellungsmatrix ${}_b[\langle\cdot,\cdot\rangle]_b = M$. Mit der Basiswechselmatrix

$$U \;:=\; {}_b[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_B \;=\; \begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\4&0&-1\end{pmatrix}$$

folgt, dass die Darstellungsmatrix von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezüglich B die Gleichung

$${}_B[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B \;=\; {}_b[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_B^T \cdot {}_b[\langle\cdot,\cdot\rangle]_b \cdot {}_b[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_B \;=\; U^T M U$$

erfüllt. Die Matrix M ist also durch die Gleichung $U^T M U = I_3$ charakterisiert. Das Ergebnis lautet daher

$$M = (U^T)^{-1}U^{-1} = \begin{pmatrix}26&-23&-19\\-23&21&17\\-19&17&14\end{pmatrix}.$$

14. Seien $R, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zwei nicht-triviale Drehungen um je eine Gerade durch den Ursprung. Beweise die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

   (a) R und S kommutieren, das heisst, es gilt $RS = SR$.

   (b) R und S haben entweder dieselbe Drehachse oder sind Rotationen um 180° bezüglich orthogonaler Drehachsen.

   Lösung: Jede nicht-triviale Drehung im $\mathbb{R}^3$ hat den Eigenwert 1 mit geometrischer Vielfachheit 1. Nach Voraussetzung gilt dies also für R und S. Seien v_R, v_S normierte Eigenvektoren von R bzw. S zum Eigenwert 1.

   „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Angenommen R und S kommutieren. Nach Serie 14 Aufgabe 1a ist dann v_R auch ein Eigenvektor von S zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Da S orthogonal ist, kann dieser Eigenwert nur $\lambda = \pm 1$ sein.

   Im Fall $\lambda = 1$ ist wegen der geometrischen Vielfachheit 1 des Eigenwertes 1 der Vektor v_R ein Vielfaches von v_S. Die Drehungen R und S haben also dieselbe Drehachse $\langle v_R \rangle = \langle v_S \rangle$.

   Im Fall $\lambda = -1$ sind v_R, v_S Eigenvektoren von S zu den jeweiligen Eigenwerten -1 und 1, wegen der Orthogonalität von S sind sie also insbesondere orthogonal zueinander. Folglich haben R und S orthogonale Drehachsen. Weiter ist jetzt -1 ein Eigenwert von S, also hat S den Drehwinkel 180°. Schliesslich wiederholen wir die bisherigen Argumente mit vertauschten Rollen von R und S. Anwenden von Serie 14 Aufgabe 1a zeigt, dass der Eigenvektor v_S von S ein Eigenvektor von R zu einem Eigenwert $\mu = \pm 1$ ist. Im Fall $\mu = 1$ wären die Drehachsen gleich, was jetzt schon ausgeschlossen ist. Also ist $\mu = -1$, und somit hat auch R den Drehwinkel 180°.

   „(b) $\Rightarrow$ (a)“: Haben R und S dieselbe Drehachse, gilt also $\mathrm{Eig}_1(R) = \mathrm{Eig}_1(S)$, so haben R und S bezüglich einer Orthonormalbasis der Form $b = (v_R, v_2, v_3)$ für Vektoren $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ die Darstellungsmatrizen

$$M_{bb}(R) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & \sin\alpha \\ & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad M_{bb}(S) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\beta & \sin\beta \\ & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

   mit jeweiligen Drehwinkeln $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Durch direktes Rechnen folgt

$$M_{bb}(R) \cdot M_{bb}(S) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ & -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = M_{bb}(S) \cdot M_{bb}(R),$$

   also $R \circ S = S \circ R$.

   Haben R und S orthogonale Drehachsen und beide den Drehwinkel 180°, dann ist -1 ein Eigenwert von R der Vielfachheit 2, also $\langle v_R \rangle^\perp = \mathrm{Eig}_{-1}(R)$. Es folgt $v_S \in \langle v_R \rangle^\perp = \mathrm{Eig}_{-1}(R)$. Ebenso zeigt man $v_R \in \langle v_S \rangle^\perp = \mathrm{Eig}_{-1}(S)$. Für jeden nichtverschwindenden Vektor $b \in \langle v_R, v_S \rangle^\perp$ folgt weiter $b \in \mathrm{Eig}_{-1}(R)$ und $b \in \mathrm{Eig}_{-1}(S)$. Also haben R und S beide bezüglich der Basis (v_R, v_S, b) Diagonalgestalt; somit kommutieren sie miteinander.

15. Sei f ein Automorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V. Zeige: Ist f selbstadjungiert, bzw. unitär, bzw. normal, so haben f^* und f^{-1} dieselbe Eigenschaft.

Lösung: Nach Serie 19, Aufgabe 6d gilt stets $(f^{-1})^* \overset{!}{=} (f^*)^{-1}$.

Zuerst sei f selbstadjungiert, nach Definition also $f^* = f$. Dann gilt $(f^*)^* = f^*$ und $(f^{-1})^* \overset{!}{=} (f^*)^{-1} = f^{-1}$; somit sind f^* und f^{-1} selbstadjungiert.

Sodann sei f unitär, nach Definition also $f^* = f^{-1}$. Dann gilt $(f^*)^* = (f^{-1})^* \overset{!}{=} (f^*)^{-1}$ und $(f^{-1})^* \overset{!}{=} (f^*)^{-1} = (f^{-1})^{-1}$; somit sind f^* und f^{-1} unitär.

Schliesslich sei f normal, nach Definition also $f^* \circ f = f \circ f^*$. Wegen $(f^*)^* = f$ gilt dann

$$(f^*)^* \circ f^* = f \circ f^* = f^* \circ f = f^* \circ (f^*)^*$$

und

$$(f^{-1})^* \circ f^{-1} \overset{!}{=} (f^*)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^*)^{-1} = (f^* \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (f^*)^{-1} \overset{!}{=} f^{-1} \circ (f^{-1})^*,$$

somit sind f^* und f^{-1} normal.

16. Sei V der euklidische Raum der reellen 2×2-Matrizen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(A^T B).$$

Für $u \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $F_u : V \to V$ definiert durch

$$F_u(A) := A^T - u \cdot (\mathrm{Spur} A) \cdot I_2$$

(a) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u selbstadjungiert?

(b) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u orthogonal?

(c) Sei $u \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass F_u sowohl selbstadjungiert als auch orthogonal ist. Welche Abbildung ist dann $F_u \circ F_u$?

Lösung: Man zeigt direkt, dass die Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von V bezüglich des gegebenen Skalarprodukts bilden. Die Darstellungsmatrix von F_u bezüglich dieser Basis ist die Diagonalmatrix

$$M_u := \begin{pmatrix} 1-2u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit hat F_u die Eigenwerte $1 - 2u$ und ± 1.

(a) Da die Darstellungsmatrix von F_u bezüglich einer Orthonormalbasis symmetrisch ist, ist F_u immer selbstadjungiert.

(b) Ein Endomorphismus ist genau dann orthogonal, wenn seine Darstellungsmatrix bezüglich einer Orthonormalbasis orthogonal ist. Für die obige Matrix M_u gilt dies genau dann, wenn $u \in \{0, 1\}$ ist.

(c) Wegen (a) und (b) ist dies genau dann der Fall, wenn $u \in \{0, 1\}$ ist. In diesem Fall ist $M_u^2 = I_4$ und folglich $F_u \circ F_u = \mathrm{id}$.

Alternative Lösung: Wir rechnen direkt die Definitionen nach und verwenden dabei die Linearität der Spur sowie die Eigenschaften $\mathrm{Spur}(A^T) = \mathrm{Spur}(A)$ und $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$; siehe Wiederholungsserie LA I, Aufgabe 4.

(a) Für alle reellen 2×2-Matrizen A, B gilt

$$\begin{aligned}
\langle F_u(A), B\rangle &= \mathrm{Spur}\big(F_u(A)^T \cdot B\big) \\
&= \mathrm{Spur}\big(\big(A^T - u\,\mathrm{Spur}(A)I\big)^T \cdot B\big) \\
&= \mathrm{Spur}\big(\big(A - u\,\mathrm{Spur}(A)I\big) \cdot B\big) \\
&= \mathrm{Spur}(AB) - u\,\mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B).
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ ist dieser Ausdruck symmetrisch in A, B und daher gleich $\langle F_u(B), A\rangle = \langle A, F_u(B)\rangle$. Also ist F_u selbstadjungiert für alle $u \in \mathbb{R}$.

(b) Für alle reellen 2×2-Matrizen A und B gilt

$$\begin{aligned}
\langle F_u(A), F_u(B)\rangle &= \mathrm{Spur}\Big(\big(A^T - u\,\mathrm{Spur}(A)I\big)^T \cdot \big(B^T - u\,\mathrm{Spur}(B)I\big)\Big) \\
&= \mathrm{Spur}\big((A - u\,\mathrm{Spur}(A)I) \cdot \big(B^T - u\,\mathrm{Spur}(B)I\big)\big) \\
&= \mathrm{Spur}(AB^T) - 2u\,\mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B) + 2u^2\,\mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B).
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Spur}(AB^T) = \mathrm{Spur}(B^TA) = \langle B, A\rangle = \langle A, B\rangle$ folgt daraus

$$\langle F_u(A), F_u(B)\rangle = \langle A, B\rangle + 2u(u-1)\,\mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B).$$

Daher ist F_u genau dann orthogonal, wenn

$$2u(u-1)\,\mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B) = 0$$

ist für alle A und B. Da es Matrizen mit nicht-verschwindender Spur gibt, gilt dies genau für $u \in \{0, 1\}$.

(c) Da F_u sowohl selbstadjungiert als auch orthogonal ist, gilt

$$\langle A, B\rangle = \langle F_u(A), F_u(B)\rangle = \langle F_u^2(A), B\rangle$$

für alle A und B. Im Fall $B = A - F_u^2(A)$ impliziert dies

$$\langle B, B\rangle = \langle A - F_u^2(A), B\rangle = \langle A, B\rangle - \langle F_u^2(A), B\rangle = 0.$$

Da das Skalarprodukt positiv definit ist, folgt daraus $B = 0$. Für alle A gilt daher $A - F_u^2(A) = O$ und somit $F_u^2 = \mathrm{id}$.

17. Beweise oder widerlege: Jeder normale Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums ist die Komposition eines selbstadjungierten mit einem unitären Endomorphismus.

    Lösung: Für jeden normalen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V existiert eine Orthonormalbasis b, sodass ${}_b[f]_b$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ist. Schreibe jede dieser komplexen Zahlen in der Form $\lambda_j = r_j e^{i\varphi_j}$ mit reellen Zahlen r_j, φ_j. Sei S bzw. U der eindeutige Endomorphismus von V, dessen Darstellungsmatrix bezüglich b die Diagonalmatrix mit den Einträgen $r_1, \ldots, r_n$ bzw. $e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}$ ist. Dann ist S selbstadjungiert und U unitär und es gilt

    $$ {}_b[S \circ U]_b ={}_b [S]_b \cdot_b [U]_b = \operatorname{diag}(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n}) ={}_b [f]_b, $$

    also $S \circ U = f$. Damit ist die Ausage bewiesen.

    Bemerkung: Für die so gefundenen Endomorphismen gilt zusätzlich $S \circ U = U \circ S$.

18. Wir betrachten ein korrekt ausgefülltes Sudokugitter als eine 9×9 Matrix S mit Einträgen in $\{1, 2, \ldots, 9\} \subset \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind für alle, für manche, für kein S korrekt?

    (a) Die Zahl 45 ist ein Eigenwert von S.

    (b) Die Determinante von S ist durch 9 teilbar.

    (c) Der Vektor $(1, \ldots, 9)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von S.

    *(d) Die Determinante von S ist positiv.

    Lösung: (a) Jede Zeile von S besteht aus den Zahlen 1 bis 9 in gewisser Reihenfolge, somit ist $(1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $1+2+\ldots+9 = 45$. Die Aussage ist also für alle S korrekt.

    (b) Die Determinante ändert sich nicht, wenn wir alle späteren Zeilen zu der ersten addieren. Danach ist die erste Zeile gleich $(45, 45, \ldots, 45)$. Die fragliche Determinante ist also 45 mal die Determinante, nachdem wir die erste Zeile durch $(1, \ldots, 1)$ ersetzt haben. Da alle Einträge in der resultierenden Matrix immer noch ganze Zahlen sind, ist auch diese Determinante noch eine ganze Zahl. Somit ist $\det(S)$ immer durch 45 teilbar.

    Bemerkung: Wenn wir danach noch alle späteren Spalten zur ersten addieren, so wird die erste Spalte gleich $(9, 45, \ldots, 45)^T$. Daraus können wir noch den Faktor 9 herausziehen; folglich ist $\det(S)$ sogar durch $9 \cdot 45 = 405$ teilbar.

    (c) Die Summe jeder Spalte der Matrix $\widetilde{S} := S/45$ ist 1, und alle Einträge sind positiv; also ist $\widetilde{S}$ eine Markov-Matrix. Mit Aufgabe 27 der Wiederholungsserie LAI hat daher jeder komplexe Eigenwert von $\widetilde{S}$ den Betrag $\leqslant 1$. Somit hat jeder komplexe Eigenwert von S den Betrag $\leqslant 45$.

    Angenommen $v := (1, \ldots, 9)^T$ ist ein Eigenvektor von S zu einem Eigenwert λ, und sei $(a_1, \ldots, a_9)$ die erste Zeile von S. Wegen $a_i \geqslant 1$ für alle i und $a_j > 1$ für ein $1 \leqslant j \leqslant 9$, folgt aus dem Vergleichen des ersten Eintrages von $Sv = \lambda v$ dann

    $$ \lambda = (a_1, \ldots, a_n) \cdot (1, \ldots, 9)^T = \sum_{i=1}^{n} i a_i > \sum_i i = 45. $$

Dies widerspricht der obigen Aussage $|\lambda_i| \leqslant 45$. Somit ist $(1, \ldots, 9)^T$ nie ein Eigenvektor von S.

(c) Falls S eine Sudokumatrix mit positiver Determinante ist, erhält man durch Vertauschen der zwei ersten Zeilen wieder eine Sudokumatrix, deren Determinante gleich $-\det(S)$, also negativ ist. Daher kann $\det(S)$ nicht immer positiv sein.

Um zu überprüfen ob die Aussage manchmal oder nie gilt, müssen wir entscheiden ob eine Sudokumatrix mit positiver Determinante existiert. Wählen wir zum Beispiel

$$S := \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right),$$

so folgt durch direktes Rechnen (für welches es sich anbietet, einen Computer zu verwenden)

$$\det(S) = -3^{16} \cdot 5 = -215233605.$$

Durch Vertauschen der ersten beiden Zeilen in S erhält man somit eine Sudokumatrix mit positiver Determinante. Die Aussage ist also manchmal wahr und manchmal nicht.

Bemerkung. Nicht jede Sudokumatrix ist invertierbar; zum Beispiel gilt

$$\det \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 6 & 7 & 9 \\ \hline 5 & 3 & 8 & 4 & 2 & 6 & 1 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 9 & 1 & 3 & 8 & 6 \\ 1 & 9 & 6 & 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ \hline 8 & 6 & 5 & 2 & 1 & 9 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 8 & 3 & 5 & 9 & 6 & 1 \end{array}\right) = 0\,,$$

siehe auch `http://math.stackexchange.com/questions/873709/`.

19. Für welche reellen Zahlen a und b existiert eine reelle 2×2-Matrix A mit

$$A^{20} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}?$$

Lösung: Nehmen wir an, es gebe eine solche Matrix A. Wir trigonalisieren sie über $\mathbb{C}$, wählen also $U \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} u & * \\ 0 & v \end{pmatrix}$ für gewisse $u, v \in \mathbb{C}$ und einen Eintrag $*$, der uns hier nicht interessiert. Dann ist $U^{-1}A^{20}U = (U^{-1}AU)^{20} = \begin{pmatrix} u^{20} & * \\ 0 & v^{20} \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A^{20} ist also gleich

$(X-u^{20})(X-v^{20})$. Nach Voraussetzung ist es aber auch gleich $(X-a)(X-b)$. Deshalb sind u^{20}, v^{20} gleich a, b bis auf die Reihenfolge.

Sind $u, v \in \mathbb{R}$, so gilt $u^{20}, v^{20} \geqslant 0$, also auch $a, b \geqslant 0$. Andernfalls ist $u = \overline{v}$ und somit $a = \overline{b}$. Da aber b reell ist, folgt daraus $a = b$. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von A ist also $a, b \geqslant 0$ oder $a = b$.

Wir zeigen, dass diese Bedingung auch hinreicht. Sind $a, b \geqslant 0$, so tut es zum Beispiel die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} \sqrt[20]{a} & 0 \\ 0 & \sqrt[20]{b} \end{smallmatrix}\right)$. Sei nun also $a = b < 0$. Wir erinnern uns an den injektiven Ringhomomorphismus

$$k\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Matrix

$$A \;:=\; k\big(\sqrt[20]{|a|} \cdot e^{2\pi i/40}\big) \;=\; \sqrt[20]{|a|} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi/40) & -\sin(2\pi/40) \\ \sin(2\pi/40) & \cos(2\pi/40) \end{pmatrix}.$$

Wegen der Multiplikativität von k gilt dann

$$A^{20} \;=\; k\big(\big(\sqrt[20]{|a|} \cdot e^{2\pi i/40}\big)^{20}\big) \;=\; k\big(|a| \cdot e^{40\pi i/40}\big) \;=\; k(-|a|) \;=\; k(a) \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

wie gewünscht. Also ist die Bedingung hinreichend.

20. Für welche der folgenden Gleichungen existiert eine reelle Matrix X, die sie erfüllt?

(a) $X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $2X^5 + X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $X^6 + 2X^4 + 10X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $X^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Lösung: (a) Ist X eine reelle Matrix mit

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

dann gilt $X^9 = (X^3)^3 = 0$ und somit ist X nilpotent. Dann hat aber X das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_X(t) = t^3$ (siehe Zusammenfassung §8.5) und folglich ist $X^3 = 0$, was ein Widerspruch ist. Also erfüllt keine reelle Matrix die Gleichung.

(b) Betrachte die symmetrische Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen existieren eine orthogonale Matrix U und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$U^{-1}BU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Da U invertierbar ist, ist die Gleichung $2X^5 + X = B$ äquivalent zu

$$2(U^{-1}XU)^5 + U^{-1}XU = U^{-1}(2X^5 + X)U = U^{-1}BU,$$

mit $Y = U^{-1}XU$ also äquivalent zu

$$2Y^5 + Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Machen wir den Ansatz

$$Y = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$, so ist die Gleichung $2Y^5 + Y = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ äquivalent zu

$$2\mu_i^5 + \mu_i = \lambda_i$$

für $i = 1, 2, 3$. Da nun der höchste Grad im Polynom $2X^5 + X$ ungerade ist, ist die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^5 + x$ surjektiv. Somit existiert für jedes i ein $\mu_i \in \mathbb{R}$ mit $2\mu_i^5 + \mu_i = \lambda_i$. Wählen wir ein solches für $i = 1, 2, 3$, so erfüllt $Y = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ die betrachtete Gleichung. Die Matrixgleichung der Aufgabe hat also eine Lösung.

(c) Wir erinnern uns an den injektiven Ringhomomorphismus

$$\kappa\colon \mathbb{C} \to \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Da jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine komplexe Nullstelle besitzt, existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z^6 + 2z^4 + 10z = i.$$

Es folgt

$$\kappa(z)^6 + 2\kappa(z)^4 + 10\kappa(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also löst $\kappa(z)$ die gegebene Matrixgleichung.

(d) Die Matrix $Y := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -3 mit dem Eigenraum $\mathrm{Eig}_{-3}(A) = \langle v \rangle$ für $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Angenommen es existiert eine reelle Matrix X mit $X^4 = Y$. Dann ist

$$YXv = X^5 v = X(X^4 v) = XYv = -3Xv,$$

also liegt auch Xv in dem Eigenraum $\mathrm{Eig}_{-3}(A)$. Somit ist $Xv = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. (Siehe auch Serie 14 Aufgabe 1a.) Daraus folgt nun

$$\lambda^4 v = X^4 v = Yv = -3v$$

und somit $\lambda^4 = -3$. Dies ist aber unmöglich für $\lambda \in \mathbb{R}$. Daher besitzt die Gleichung keine Lösung.

21. Was sind die Möglichkeiten für den Rang einer reellen 7×7-Matrix mit Minimalpolynom X^2?

Lösung: Der einzige normierte irreduzible Faktor des Minimalpolynoms ist X. Dies entspricht dem Eigenwert 0. Also ist die Jordannormalform der Matrix eine Blockdiagonalmatrix mit Blockdiagonaleinträgen der Form

$$N_j \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{der Grösse } j \times j$$

für gewisse $j \geqslant 1$. Nach der Definition des Minimalpolynoms gilt $A^2 = O$. Für alle $j \geqslant 3$ ist aber $N_j^2 \neq O$; somit können nur Jordanblöcke der Form N_1 und N_2 auftreten. Wegen $N_1^2 = O$ und $N_2^2 = O$ gibt es aber kein Hindernis gegen diese. Nach der Minimalität des Minimalpolynoms ist andererseits $A \neq O$. Wegen $N_1 = O$ und $N_2 \neq O$ muss daher mindestens ein Block der Form N_2 in der Jordannormalform von A auftreten. Die Anzahl der Jordanblöcke der Form N_2 ist also eine ganze Zahl $a \geqslant 1$. Die Anzahl der Jordanblöcke der Form N_1 ist dann gleich $7 - 2a \geqslant 0$. Die möglichen Werte sind also $a = 1, 2, 3$. Der Rang der Matrix ist nun gleich

$$a \cdot \mathrm{Rang}(N_2) + (7-2a) \cdot \mathrm{Rang}(N_1) \;=\; a \cdot 1 + (7-2a) \cdot 0 \;=\; a.$$

Die Möglichkeiten für den Rang sind also genau 1, 2, 3.

22. Sei K ein Körper. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, so dass die Jordan-Normalform jedes Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums durch das charakteristische Polynom zusammen mit dem Minimalpolynom eindeutig bestimmt ist.

Lösung: Für jedes $n \geqslant 4$ betrachte die $n \times n$-Blockdiagonalmatrix

$$A_x \; := \; \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & x & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

Für jedes $x \in \{0, 1\}$ ist sie in Jordanscher Normalform, und zwar mit $1 + x$ Jordanblöcken der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sowie $n - 2 - 2x$ Jordanblöcken der Form (0). In beiden Fällen ist das charakteristische Polynom gleich X^n und das Minimalpolynom gleich X^2, die Jordan-Normalformen sind jedoch nicht äquivalent. Die zu den Matrizen A_0 und A_1 assoziierten Endomorphismen bilden also Gegenbeispiele zu der gewünschten Eigenschaft. Die Eigenschaft ist also für jedes $n \geqslant 4$ verletzt.

Wir zeigen nun, dass für jedes $n \leqslant 3$ die gewünschte Eigenschaft erfüllt ist. Sei also f ein beliebiger Endomorphismus eines K-Vektorraums der Dimension $n \leqslant 3$. Durch Induktion können wir voraussetzen, dass die Aussage bereits für jeden Endomorphismus eines K-Vektorraums der Dimension $< n$ gilt.

Besitzt der Endomorphismus mehrere Haupträume, so entspricht die Hauptraumzerlegung der Zerlegung des charakteristischen Polynoms wie des Minimalpolynoms in Potenzen verschiedener normierter irreduzibler Faktoren, welche jeweils das charakteristische Polynom bzw. das Minimalpolynom des von f induzierten Endomorphismus des Hauptraums sind. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Jordannormalform dann in jedem Hauptraum schon durch das charakteristische und das Minimal-Polynom bestimmt, also ist sie insgesamt durch das charakteristische und das Minimal-Polynom bestimmt, wie gewünscht.

Wir können also annehmen, dass der Endomorphismus höchstens einen Hauptraum, sagen wir zum normierten irreduziblen Polynom $p(X) \in K[X]$, besitzt. Das Minimalpolynom von f ist dann gleich $p(X)^r$ für ein $r \geqslant 0$.

Ist $r = 0$, so muss $0 = p(f)^0 = \mathrm{id}_V$ sein, also $V = 0$. In diesem Fall gibt es überhaupt nur einen Endomorphismus; der ist schon in Jordannormalform und hängt von nichts mehr ab; also ist die fragliche Bedingung in diesem Fall erfüllt.

Ist $r = 1$, so ist die Begleitmatrix von $p(X)$ die einzige Möglichkeit für die Jordanblöcke von f. Die Anzahl dieser Blöcke ist dann auch durch $n = \dim(V)$ bestimmt; die fragliche Bedingung ist somit auch in diesem Fall erfüllt.

Ist $r \geqslant 2$, so gibt es wegen $3 \geqslant n = \dim(V) \geqslant \deg(p(X)^r) = r \cdot \deg(p(X))$ nur die Möglichkeiten $(r, n) \in \{(2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ mit $\deg(p(X)) = 1$.

Im Fall $(r, n) = (2, 2)$ gibt es genau einen Jordanblock der Grösse 2×2 und sonst keinen, also ist die Jordannormalform eindeutig bestimmt.

Im Fall $(r, n) = (2, 3)$ gibt es je einen Jordanblock der Grössen 2×2 und 1×1 und sonst keine, also die Jordannormalform ebenfalls eindeutig bestimmt.

Im Fall $(r, n) = (3, 3)$ gibt es genau einen Jordanblock der Grösse 3×3 und sonst keinen, also ist die Jordannormalform ebenfalls eindeutig bestimmt.

Fazit: Die natürlichen Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft sind, unabhängig vom Körper K, genau die Zahlen $0, 1, 2, 3$.

23. Wir betrachten alle reellen symmetrischen 3×3-Matrizen, welche die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektoren besitzen.

(a) Was lässt sich über die Eigenwerte λ_i zu v_i aussagen?

(b) Gib eine Parametrisierung der Menge aller dieser Matrizen.

Lösung: Alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell, und die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerte sind orthogonal. Da v_2 und v_3 nicht orthogonal zueinander sind, muss daher $\lambda_2 = \lambda_3$ sein. Also ist auch $v_3' := v_3 - v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2. Nun sind aber v_1, v_2, v_3' von Null verschieden und zueinander orthogonal. Durch Reskalieren finden wir daher die Orthonormalbasis

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Basiswechselmatrix $U := (b_1, b_2, b_3)$ ist dann orthogonal. Dass die genannten Vektoren Eigenvektoren von A zu den obigen Eigenwerten sind, ist dann äquivalent zu

$$U^{-1}AU \;=\; D \;:=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Da U orthogonal ist, impliziert dies umgekehrt die Gleichung $A = UDU^{-1} = UDU^T$. Da D eine Diagonalmatrix ist, ist jede solche Matrix A also schon symmetrisch. Somit ist die gesuchte Menge von Matrizen gleich

$$\left\{ U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^T \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \;=\; \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_1 & 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & 0 & \lambda_2 + \lambda_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schliesslich folgt daraus, dass die Bedingung $\lambda_2 = \lambda_3$ die einzige Einschränkung an die Eigenwerte ist.

*24. Zeige: Für jede nilpotente $n \times n$-Matrix N über K ist $\exp(N)$ ähnlich zu $I_n + N$.

Lösung: Falls N ähnlich zu einer Matrix N' ist, also $S^{-1}NS = N'$ ist für eine invertierbare Matrix S, dann gilt:

$$S^{-1}(I_n + N)S = I_n + S^{-1}NS = I_n + N'$$
$$S^{-1}\exp(N)S = \exp(S^{-1}NS) = \exp(N').$$

Also ist auch $I_n + N$ ähnlich zu $I_n + N'$, und $\exp(N)$ ähnlich zu $\exp(N')$. Da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, folgt daraus, dass $I_n + N$ genau dann ähnlich zu $\exp(N)$ ist, wenn $I_n + N'$ ähnlich zu $\exp(N')$ ist. Es genügt daher die Aussage für eine Matrix N in Jordanscher Normalform zu zeigen.

Falls die Aussage für jeden Jordanblock zum Eigenwert 0 gilt, so folgt aus der Zerlegung von N in eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken auf den Diagonalen, dass sie auch für N gilt. Es genügt daher die Aussage für einen Jordanblock beliebiger Grösse n der Form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

zu zeigen.

Dafür können wir nun explizit berechnen:

$$\exp(N) - I_n = N + \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{3!} + \ldots = \left(\frac{\delta_{i<j}}{(j-i)!}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Dies ist eine strikte obere Dreiecksmatrix, für die alle Einträge unmittelbar oberhalb der Hauptdiagonalen nicht verschwinden. Aus dem Beispiel in §8.6 der Zusammenfassung folgt daraus, dass $\exp(N) - I_n$ ähnlich zu N ist. Es existiert also eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}(\exp(N) - I_n)S = N$. Damit ist aber auch $S^{-1}\exp(N)S = I_n + N$ und somit $\exp(N)$ ähnlich zu $I_n + N$, wie zu beweisen war.

*25. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix über K und betrachte den Unterraum

$$U(A) := \{B \in \mathrm{Mat}_{nn}(K) : AB = BA\}.$$

(a) Finde eine Basis von $U(A)$ für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Zeige: $n \leqslant \dim U(A) \leqslant n^2$.

(c) In welchen Fällen gilt Gleichheit in (b)?

Lösung: Sei S eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Eine $n \times n$-Matrix B kommutiert mit $D := S^{-1}AS$ genau dann, wenn SBS^{-1} mit A kommutiert. Es gilt also

$$(\dagger) \qquad U(A) = \left\{SBS^{-1} \;\middle|\; B \in U(D)\right\}.$$

(a) Mit

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist also diagonalisierbar.

Eine Matrix B kommutiert mit der Diagonalmatrix D genau dann, wenn B die Eigenräume von D invariant lässt, also von der Blockform

$$B = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

ist mit Blockmatrizen C und D der jeweiligen Grösse 2×2 und 1×1.

Mit den Elementarmatrizen $E_{k\ell} := (\delta_{ik}\delta_{j\ell})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ für alle $k, \ell = 1, 2, 3$ erhalten wir also

$$U(D) = \left\langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33} \right\rangle$$

und somit

$$U(A) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

(b) Da $U(A)$ ein Unterraum des Raumes aller $n \times n$-Matrizen ist und dieser Dimension n^2 hat, gilt $\dim U(A) \leqslant n^2$. Wir müssen also $\dim U(A) \geqslant n$ zeigen.

Wegen (†) ist die Dimension von $U(A)$ invariant unter Ähnlichkeit. Wir können also annehmen, dass A Jordansche Normalform hat, also von der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

ist mit Jordanblöcken J_i der Grösse n_i für $i = 1, \ldots, k$. Eine Blockmatrix

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

mit Blöcken B_i der Grösse n_i kommutiert mit A genau dann, wenn B_i mit J_i kommutiert für alle i. Daraus erhalten wir eine Einbettung

$$U(J_1) \boxplus \cdots \boxplus U(J_k) \hookrightarrow U(A),$$

und somit die Ungleichung

$$\dim U(A) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \dim U(J_i).$$

Die Aussage folgt nun aus der folgenden Behauptung.

Behauptung 1. Für jeden Jordanblock J der Grösse m gilt $\dim U(J) \geqslant m$.

Beweis der Behauptung. Die Matrizen $I_m, J, \dots, J^{m-1}$ kommutieren mit J. Falls die Matrizen $I_m, J, \dots, J^{m-1}$ linear abhängig sind, existieren Elemente $a_0, \dots, a_{m-1} \in K$, die nicht alle verschwinden, mit

$$a_0 I_m + a_1 J + \cdots + a_{m-1} J^{m-1} = 0.$$

Das Polynom $q(X) := \sum_{i=0}^{m-1} a_i X^i$ hat also Grad $\deg q(X) \leqslant m-1$ und erfüllt $q(J) = 0$. Nach Definition teilt das Minimalpolynom von J das Polynom $q(X)$ und muss folglich Grad kleiner als m haben. Das Minimalpolynom eines Jordanblocks ist aber gleich seinem charakteristischen Polynom, also hat es Grad m. Dies ist ein Widerspruch. □

(c) Es gilt $\dim U(A) = n^2$ genau dann, wenn A mit allen $n \times n$-Matrizen kommutiert. Dies ist so genau dann, wenn A ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Es bleibt zu untersuchen, wann $\dim U(A) = n$ ist. Wie in (b) können wir dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A Jordansche Normalform

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

hat mit Jordanblöcken J_i der Grösse n_i. Betrachte eine beliebige Blockmatrix vom selben Typ

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \dots & B_{kk} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $AB = BA$ genau dann, wenn für alle i und j die Gleichung

$$(*) \qquad J_i B_{ij} = B_{ij} J_j$$

gilt. Diese Bedingung betrifft jeden Block B_{ij} separat.

Für einen Diagonalblock B_{ii} ist die Bedingung äquivalent zu $B_{ii} \in U(J_i)$. Deshalb zeigen wir zuerst:

Behauptung 2. Für jeden Jordanblock J der Grösse m gilt $\dim U(J) = m$.

Beweis: Sei $e_m := (0, \dots, 0, 1)^T$ der m-te Standard-Basisvektor. Aus der Konstruktion des Jordanblocks oder durch direktes Nachprüfen folgt, dass die Vektoren $e_m, Je_m, \dots, J^{m-1}e_m$ eine Basis von K^m bilden. Sei nun B eine Matrix, die mit J kommutiert. Für jedes i gilt dann

$$L_B(J^i e_m) = BJ^i e_m = J^i B e_m\,.$$

Da die Vektoren $e_m, \dots, J^{m-1}e_m$ eine Basis von K^m bilden, ist die Abbildung L_B und somit auch die Matrix B bereits durch den Vektor Be_m eindeutig bestimmt. Dies bedeutet, dass die lineare Abbildung

$$U(J) \to V, \quad B \mapsto Be_m$$

injektiv ist. Also gilt $\dim U(J) \leqslant \dim K^m = m$. Zusammen mit Behauptung 1 aus (b) folgt daraus $\dim U(J) = m$. □

Behauptung 3. Es gilt $\dim U(A) = n$ genau dann, wenn die Matrixgleichung $(*)$ für alle $i \neq j$ nur die Nullmatrix $B_{ij} = O$ als Lösung besitzt.

Beweis: Aus Behauptung 2 folgt, dass die Blockdiagonalmatrizen in $U(A)$ einen Unterraum der Dimension $n_1 + \ldots + n_k = n$ bilden. Also ist $\dim U(A) = n$ genau dann, wenn dieser Unterraum schon gleich $U(A)$ ist, das heisst, wenn jede Matrix in $U(A)$ bereits eine Blockdiagonalmatrix des obigen Typs ist. Aufgrund der Bedingung $(*)$ ist dies äquivalent zur genannten Aussage. □

Behauptung 4. Gehören die Jordanblöcke J_i und J_j zu verschiedenen normierten irreduziblen Polynomen, so hat die Matrixgleichung $(*)$ nur die Nullmatrix als Lösung.

Beweis: Als Jordanblöcke haben J_i und J_j charakteristische Polynome der Form $p_i^{m_i}$ bzw. $p_j^{m_j}$ mit normierten irreduziblen Polynomen p_i und p_j, welche nach Voraussetzung verschieden sind. Nach Cayley-Hamilton gilt dabei $p_i^{m_i}(J_i) = O$ und $p_j^{m_j}(J_j) = O$.

Wir zeigen zuerst, dass die Matrix $p_j^{m_j}(J_i)$ invertierbar ist. Betrachte dafür den Unterraum $U := \{v \in K^{n_i} \mid p_j^{m_j}(J_i)v = 0\}$. Wie bei der Konstruktion des Hauptraums ist dieser Unterraum invariant unter Linksmultiplikation mit J_i. Sei f der davon induzierte Endomorphismus von U. Nach Konstruktion von U gilt dann $p_j^{m_j}(f) = 0$, und wegen $p_i^{m_i}(J_i) = O$ gilt auch $p_i^{m_i}(f) = 0$. Somit ist das Minimalpolynom von f sowohl ein Teiler von $p_j^{m_j}$ als auch ein Teiler von $p_i^{m_i}$. Nach Voraussetzung sind diese Polynome aber teilerfremd. Somit ist das Minimalpolynom von f gleich 1, was nur für den Nullraum $U = \{0\}$ möglich ist. Somit hat die Matrix $p_j^{m_j}(J_i)$ vollen Rang und ist daher invertierbar.

Betrachte nun eine Matrix B mit $J_iB = BJ_j$. Dann gilt auch $J_i^kB = BJ_j^k$ für alle $k \geqslant 0$ und somit $\varphi(J_i)B = B\varphi(J_j)$ für jedes Polynom $\varphi \in K[X]$. Für $\varphi = p_j^{m_j}$ erhalten wir

$$p_j^{m_j}(J_i) \cdot B \;=\; B \cdot p_j^{m_j}(J_j) \;=\; B \cdot O \;=\; O.$$

Da $p_j^{m_j}(J_i)$ invertierbar ist, folgt daraus $B = O$, was zu zeigen war. □

Behauptung 5. Gehören verschiedene Jordanblöcke J_i und J_j zu demselben normierten irreduziblen Polynom, so hat die Matrixgleichung $(*)$ eine nichttriviale Lösung.

Beweis: Nach Voraussetzung haben die Jordanblöcke J_i und J_j die charakteristischen Polynome p^{m_i} bzw. p^{m_j} mit Exponenten $m_i, m_j \geqslant 1$ und demselben normierten irreduziblen Polynomen p. Diese Jordanblöcke sind ihrerseits wieder Blockmatrizen der Form

$$\begin{pmatrix} P & E_{d1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & E_{d1} \\ & & & P \end{pmatrix},$$

wobei P die Begleitmatrix des Polynoms p ist und alle nicht dargestellten Blöcke gleich Null sind. Sei d die Grösse von P. Für die $m_i \times m_j$-Blockmatrix

$$B \;:=\; \begin{pmatrix} & & I_d \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

folgt dann durch direkte Rechnung $J_iB = BJ_j$. $\square$

Fazit. Behauptungen 3 bis 5 implizieren, dass genau dann $\dim U(A) = n$ ist, wenn es zu jedem normierten irreduziblen Faktor von $\mathrm{char}_A(X)$ genau einen Jordanblock gibt. Wir wissen bereits, dass für jeden Jordanblock das Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom ist, und dass sich die Minimalpolynome über die verschiedenen Haupträume aufmultiplizieren. Also gilt $\dim U(A) = n$ genau dann, wenn das Minimalpolynom von A gleich dem charakteristischen Polynom von A ist.

26. Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix, deren Eigenwerte alle den Betrag < 1 haben. Beweise, dass die Matrix $I_n - A$ invertierbar ist und berechne ihre Inverse.

Lösung: Sei U eine invertierbare Matrix, so dass

$$J \;:=\; U^{-1}AU \;=\; \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

in Jordannormalform ist mit Jordanblöcken $J_j := \lambda_j I_{m_j} + N_{m_j}$ der Grösse $m_j \times m_j$ mit der üblichen nilpotenten Matrix N_{m_j} für alle $1 \leqslant j \leqslant r$. Wie in Aufgabe 1 der Serie 15 impliziert die binomische Formel für alle $k \geqslant 0$ die Gleichung

$$J_j^k \;=\; \sum_{\ell=0}^{m_j-1} \lambda_j^{k-\ell} \binom{k}{\ell} N_{m_j}^\ell.$$

Für jedes $\ell \geqslant 0$ hat dabei die Matrix $N_{m_j}^\ell$ genau $\max\{m_j - \ell, 0\}$ Einträge 1 und sonst nur Einträge 0. Für die in Abschnitt 9.6 eingeführte Matrixnorm gilt daher $\|N_{m_j}^\ell\| \leqslant m_j$. Sei nun $k \geqslant n$. Aus der Voraussetzung $|\lambda_j| < 1$ folgt dann die Ungleichung $|\lambda_j|^{k-\ell} \leqslant |\lambda_j|^k$ für alle $0 \leqslant \ell < m_j$. Ausserdem gilt $\binom{k}{\ell} \leqslant k^\ell < k^{m_j}$. Insgesamt erhalten wir daraus die Abschätzung

$$\|J_j^k\| \;\leqslant\; \sum_{\ell=0}^{m_j-1} |\lambda_j|^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \|N_{m_j}^\ell\| \;\leqslant\; \sum_{\ell=0}^{m_j-1} |\lambda_j|^k k^{m_j} m_j \;=\; |\lambda_j|^k k^{m_j} m_j^2.$$

Nach Voraussetzung ist $c := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|\} < 1$. Mit der Dreiecksungleichung für die Norm $\|\ \|$ folgt daher

$$\|J^k\| \;\leqslant\; \sum_{j=1}^{r} \|J_j^k\| \;\leqslant\; \sum_{j=1}^{r} |\lambda_j|^k k^{m_j} m_j^2 \;\leqslant\; c^k k^n n^2.$$

Mit der Submultiplikativität der Matrixnorm folgt daraus

$$\|A^k\| \;=\; \|UJ^kU^{-1}\| \;\leqslant\; \|U\| \cdot \|J^k\| \cdot \|U^{-1}\| \;\leqslant\; \|U\| c^k k^n n^2 \|U^{-1}\| \;=\; o(c^{\frac{k}{2}})$$

für $k \to \infty$. Daher ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^k$ absolut konvergent. Die absolute Konvergenz rechtfertigt nun die Rechnung

$$(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^\infty A^k \;=\; \sum_{k=0}^\infty (A^k - A^{k+1}) \;\stackrel{!}{=}\; \sum_{k=0}^\infty A^k - \sum_{k=0}^\infty A^{k+1} \;=\; \sum_{k=0}^\infty A^k - \sum_{k=1}^\infty A^k \;=\; I_n.$$

Somit ist $I_n - A$ invertierbar mit der Inversen $\sum_{k=0}^\infty A^k$.

27. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & -8 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Jordansche Normalform von A und von B, sowie zugehörige Jordan-Basen von $\mathbb{R}^5$.

Lösung: (A) Wir bestimmen die Jordansche Normalform von A, indem wir die Jordansche Normalform der einzelnen Blöcke

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

(A1) Die Matrix A_1 hat das characteristische Polynom

$$\mathrm{char}_{A_1}(X) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2,$$

also ist -1 der einzige Eigenwert von A_1. Wegen $A_1 + I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ hat A_1 genau einen Jordanblock zum Eigenwert -1 der Grösse 2×2. Sei v_1 ein beliebiger Vektor, der nicht in $\mathrm{Kern}(A_1 + I_2)$ liegt, also zum Beispiel $v_1 := (1,0)^T$. Dann bildet

$$(A_1 v_1, v_1) = \big((2,-1)^T, (1,0)^T\big)$$

eine Jordanbasis von $\mathbb{R}^2$ zu A_1.

(A2) Das charakteristische Polynom von A_2 ist

$$\mathrm{char}_{A_2}(A) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X-2)^3,$$

also ist 2 der einzige Eigenwert. Wir haben

$$A_2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und $(A - 2I_3)^k = 0$ für alle $k \geqslant 3$. Die Matrix A_2 hat also einen 3×3-Jordanblock zum Eigenwert 2. Sei $w_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Kern}((A - 2I_3)^2)$ beliebig, also zum Beispiel sei $w_1 := (1,0,0)^T$. Dann ist

$$\big((A_2 - I_3)^2 w_1, (A_2 - I_3) w_1, w_1\big) = \big((1,0,-1)^T, (0,1,-1)^T, (1,0,0)^T\big)$$

eine Jordanbasis von A_2.

Wir schliessen, dass A die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt mit der zugehörigen Jordanbasis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(B) Durch Spaltenentwicklung entlang der dritten Spalte erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
\mathrm{char}_B(X) &= \det \begin{pmatrix} X-8 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & X-9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-3 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & X+8 & -12 \\ -6 & -4 & 0 & 4 & X-6 \end{pmatrix} \\
&= (X-3) \cdot \det \begin{pmatrix} X-8 & -6 & 0 & 0 \\ 12 & X+9 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & X+8 & -12 \\ -6 & -4 & 4 & X-6 \end{pmatrix} \\
&= (X-3) \cdot \det \begin{pmatrix} X-8 & -6 \\ 12 & X+9 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} X+8 & -12 \\ 4 & X-6 \end{pmatrix} \\
&= (X-3) \cdot (X^2+X) \cdot (X^2+2X) \\
&= (X-3)(X+1)(X+2)X^2.
\end{aligned}$$

Folglich hat B die Eigenwerte -2, -1, 0 und 3.

Da die Eigenwerte -2, -1 und 3 mit geometrischer Vielfachheit 1 auftreten, haben die zugehörigen Jordan-Blöcke Grösse 1. Für diese genügt es deshalb, jeweils einen Eigenvektor zu bestimmen. Die Eigenräume sind dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}_{-2}(B) &= \langle (0,0,0,2,1)^T \rangle, \\
\mathrm{Eig}_{-1}(B) &= \langle (2,-3,0,0,0)^T \rangle, \\
\mathrm{Eig}_{3}(B) &= \langle (0,0,1,0,0)^T \rangle.
\end{aligned}$$

Sodann betrachten wir den Eigenwert 0 der Vielfachheit 2. Wir berechnen

$$B^2 = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(B) &= \mathrm{span}\left\{(0,0,0,3,2)^T\right\}. \\
\mathrm{Hau}_X(B) = \mathrm{Kern}(B^2) &= \mathrm{span}\left\{(3,-4,0,0,0)^T, (0,0,0,3,2)^T\right\}.
\end{aligned}$$

Sei $w \in \mathrm{Kern}(B^2) \setminus \mathrm{Kern}(B)$ beliebig, zum Beispiel $w := (3,-4,0,0,0)^T$. Dann bildet

$$(Bw, w) = \left((0,0,0,3,2)^T, (3,-4,0,0,0)^T\right)$$

eine Jordanbasis des Hauptraums $\mathrm{Hau}_X(B)$.

Insgesamt schliessen wir, dass B die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der zugehörigen Jordanbasis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

*28. Seien f und g Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass die Endomorphismen fg und gf dasselbe charakteristische Polynom haben.

Lösung: Wähle eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_r)$ von $\mathrm{Kern}(f)$ und erweitere sie zu einer geordneten Basis $B := (v_1, \ldots, v_n)$ von V. Die Vektoren $w_i := f(v_i)$ für alle $r < i \leqslant n$ bilden dann eine geordnete Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Erweitere diese zu einer geordneten Basis $B' := (w_1, \ldots, w_n)$ von V. Die zugehörige Darstellungsmatrix von f ist dann die folgende Blockmatrix mit $s := n - r$:

$$_{B'}[f]_B \;=\; \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & I_s \end{array}\right).$$

Schreibe die Darstellungsmatrix von g bezüglich der vertauschten Basen ebenfalls in Blockform:

$$_{B}[g]_{B'} \;=\; \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).$$

Die zusammengesetzten Endomorphismen haben dann die Darstellungsmatrizen

$$_{B}[gf]_B \;=\; {}_{B}[g]_{B'} \cdot {}_{B'}[f]_B \;=\; \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & I_s \end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{c|c} O & B \\ \hline O & D \end{array}\right).$$

$$_{B'}[fg]_{B'} \;=\; {}_{B'}[f]_B \cdot {}_{B}[g]_{B'} \;=\; \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & I_s \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline C & D \end{array}\right).$$

Die charakteristische Polynome dieser Blockdreiecksmatrizen hängen von den Einträgen ausserhalb der Blockdiagonale, also von B bzw. C, nicht ab. Sie sind also beide gleich dem charakteristischen Polynom der Blockmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & D \end{array}\right),$$

und somit untereinander gleich.

Aliter: Wegen der Funktorialität von Alt^r und wegen $\mathrm{Spur}(F \circ G) = \mathrm{Spur}(G \circ F)$ für alle Endomorphismen F, G eines endlich-dimensionalen Vektorraums gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(\mathrm{Alt}^r(f \circ g)) &= \mathrm{Spur}(\mathrm{Alt}^r(f) \circ \mathrm{Alt}^r(g)) \\ &= \mathrm{Spur}(\mathrm{Alt}^r(g) \circ \mathrm{Alt}^r(f)) \\ &= \mathrm{Spur}(\mathrm{Alt}^r(g \circ f))\end{aligned}$$

für alle $r \geqslant 0$, also mit $n = \dim(V)$ und Serie 24 Aufgabe 2 somit

$$\begin{aligned}\mathrm{char}_{f\circ g}(X) &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \,\mathrm{Spur}(\mathrm{Alt}^r(f \circ g)) X^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \,\mathrm{Spur}(\mathrm{Alt}^r(g \circ f)) X^{n-r} \\ &= \mathrm{char}_{g\circ f}(X)\,.\end{aligned}$$

*29. Sei $T : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass gilt

$$\forall v, w \in V\colon\ \langle v, w\rangle = 0 \implies \langle T(v), T(w)\rangle = 0\,.$$

Zeige, dass eine unitäre Abbildung $S : V \to V$ und $c \in \mathbb{C}$ existieren mit $T = c \cdot S$.

Hinweis: Untersuche den Endomorphismus $f := T^* \circ T$.

Lösung: Nach Definition der Adjungierten T^* und der Voraussetzung gilt für alle $v, w \in V$:

$$\langle v, w\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(v), w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle = 0.$$

Also ist $f(v)$ orthogonal zu allen Vektoren, die orthogonal zu v sind. Daher gilt

$$f(v) \in (\langle v\rangle^{\perp})^{\perp} = \langle v\rangle,$$

mit anderen Worten $f(v) = \lambda_v v$ für ein $\lambda_v \in \mathbb{C}$. Für je zwei linear unabhängige Vektoren $v, w \in V$ folgt dann $\lambda_v v + \lambda_w w = f(v) + f(w) = f(v+w) = \lambda_{v+w}(v+w)$ und somit $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$. Insgesamt zeigt dies, dass $f = b \cdot \mathrm{id}_V$ ist für ein $b \in \mathbb{C}$.

Sodann ist f selbstadjungiert nach Konstruktion, und deshalb ist $b \in \mathbb{R}$. Wegen

$$b \cdot \langle v, v\rangle = \langle bv, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle \geqslant 0$$

für alle v folgt zudem $b \geqslant 0$. Im Fall $b = 0$ ist dann $\langle T(v), T(v)\rangle = 0$ für alle v und somit $T(v) = 0$. Die gewünschte Aussage gilt in diesem Fall mit $c := 0$ und $S := \mathrm{id}_V$. Im Fall $b > 0$ sei $c := \sqrt{b}$ und $S := T/\sqrt{b}$. Wegen $S^*S = T^*T/b = f/b = \mathrm{id}_V$ ist dann S unitär und es gilt $T = cS$.

*30. Eine *reelle homogene Form vom Grad d* in n Variablen ist ein Ausdruck der Form

$$q(x) \ \ = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \geqslant 0 \\ \sum_\nu i_\nu = d}} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und reellen Koeffizienten $a_{i_1,\ldots,i_n}$. Die Menge all dieser ist ein reeller Vektorraum $V_{d,n}$. Zeige, dass die *Restitutions-Abbildung*

$$\mathrm{Res}\colon\ \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to V_{d,n},\ \ \varphi \mapsto q_\varphi(x) := \varphi(x, \ldots, x).$$

ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Untersuche die *Polarisations-Abbildung*

$$\mathrm{Pol}\colon V_{d,n} \to \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ \ q(x) \mapsto \varphi_q$$

mit

$$\varphi_q(v_1, \ldots, v_d) \ := \ \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} q(t_1 v_1 + \cdots + t_d v_d)$$

für alle $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$ und für reelle Variablen $t_1, \ldots, t_d$.

Lösung: Für jede symmetrische Form $\varphi \in \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und für alle $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
&P(\mathrm{Res}(\varphi))(v_1, \ldots, v_d) \\
&\qquad = \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} \mathrm{Res}(\varphi)(t_1 v_1 + \cdots + t_d v_d) \\
&\qquad = \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} \varphi\Big(\sum_{i=1}^n t_i v_i\,, \ \ldots\ , \sum_{i=1}^n t_i v_i\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} \sum_{i_1, \ldots, i_d = 1}^{d} t_{i_1} \cdots t_{i_d} \varphi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}).
\end{aligned}$$

Falls in der Summe verschiedene Indizes i_j und $i_{j'}$ existieren mit $k := i_j = i_{j'}$, dann hat die Variable t_k im zugehörigen Term einen Exponenten $\geqslant 2$ und folglich verschwindet der Term durch die Ableitungsoperatoren. Es genügt daher nur paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_d$ zu betrachten. Wegen $1 \leqslant i_j \leqslant d$ für alle j stehen diese in bijektiver Korrespondenz zu den Permutationen S_d der Grösse d. Der obige Ausdruck ist daher gleich

$$\frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} \sum_{\sigma \in S_d} t_1 \cdots t_d \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(d)}) \ = \ \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(d)}),$$

also wegen der Symmetrieeigenschaft von φ und wegen $|S_d| = d!$ gleich

$$\frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \varphi(v_1, \ldots, v_d) = \varphi(v_1, \ldots, v_d)\,.$$

Also gilt $P \circ \mathrm{Res} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$.

Für alle reellen homogenen Formen q vom Grad d und für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(P(q))(v) \ &= P(q)(v, \ldots, v) \\
&= \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} q(t_1 v + \cdots + t_d v) \\
&= \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} q((t_1 + \cdots + t_d) v) \\
&= \frac{1}{d!} \frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} (t_1 + \cdots + t_d)^d q(v).
\end{aligned}$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d}\bigg|_{t_d=0} (t_1+\cdots+t_d)^d = d!$$

und somit

$$\operatorname{Res}(P(q))(v,\ldots,v) = q(v).$$

Als gilt auch $\operatorname{Res}\circ P = \mathrm{id}_{V_d}$. Die Abbildung P ist also ein Isomorphismus.

Bemerkung: Die Polarisations-Abbildung kann alternativ auch durch die folgende Formel definiert werden:

$$\varphi_q(v_1,\ldots,v_d) \;:=\; \frac{1}{d!}\cdot \sum_{I\subset\{1,\ldots,d\}} (-1)^{d-|I|}\cdot\varphi\big(\textstyle\sum_{i\in I} v_i\big).$$

31. Betrachte zwei K-Vektorräume V, W sowie einen Unterraum $V'\subset V$.

(a) Konstruiere einen natürlichen injektiven Homomorphismus

$$V'\otimes_K W \;\hookrightarrow V\otimes_K W.$$

Identifiziere $V'\otimes_K W$ mit seinem Bild.

(b) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus

$$(V\otimes_K W)/(V'\otimes_K W) \;\cong\; (V/V')\otimes_K W.$$

Lösung: Nach Definition von $V\otimes_K W$ ist die Abbildung $V\times W \to V\otimes_K W$, $(v,w)\mapsto v\otimes w$ bilinear. Somit ist auch ihre Einschränkung $V'\times W\to V\otimes_K W$ bilinear. Nach der universellen Eigenschaft von $V'\otimes_K W$ existiert also eine eindeutige lineare Abbildung i, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
(v,w) \arrow[d, mapsto] & V'\times W \arrow[r, hook] \arrow[d] & V\times W \arrow[d] & (v,w) \arrow[d, mapsto] \\
v\otimes' w & V'\otimes_K W \arrow[r, "i"] & V\otimes_K W & v\otimes w
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen wir das Bild eines Paars $(v,w)\in V'\times W$ in $V'\otimes_K W$ mit $v\otimes' w$, zur Unterscheidung von seinem Bild $v\otimes w$ in $V\otimes_K W$.

Die Abbildung i ist natürlich, das heisst, sie hängt von keiner Wahl ab. Nun wählen wir aber eine Basis B' von V' und erweitern sie zu einer Basis B von V. Ausserdem wählen wir eine Basis C von W. Dann bilden die Elemente $b\otimes c$ für alle $(b,c)\in B\times C$ eine Basis von $V\otimes_K W$. Andererseits bilden die Elemente $b\otimes' c$ für alle $(b,c)\in B'\times C$ eine Basis von $V'\otimes_K W$. Für diese gilt aber nach Konstruktion $i(b\otimes' c) = b\otimes c$; somit bildet i eine Basis von $V'\otimes_K W$ bijektiv auf eine Teilmenge einer Basis von $V\otimes_K W$ ab. Daher ist i injektiv, und (a) ist gezeigt.

Aliter: Die Inklusionsabbildung $\iota\colon V'\hookrightarrow V$, $v'\mapsto v$ ist linear. Nach der Funktorialität des Tensorprodukts haben wir daher eine eindeutige lineare Abbildung $i := \iota\otimes\mathrm{id}_W\colon V'\otimes_K W\to V\otimes_K W$ mit $i(v\otimes' w) = v\otimes w$ für alle $(v,w)\in V'\times W$. Fahre weiter wie oben.

(b) Die kanonische Abbildung $\pi\colon V \twoheadrightarrow V/V'$, $v \mapsto v + V'$ ist linear. Nach der Funktorialität des Tensorprodukts haben wir daher eine eindeutige lineare Abbildung $\rho := \pi \otimes \mathrm{id}_W\colon V \otimes_K W \to (V/V') \otimes_K W$ mit $\rho(v \otimes w) = (v + V') \otimes w$ für alle $(v, w) \in V \times W$.

Wähle Basen B', B, C wie oben. Dann bilden die Elemente $\pi(b) = b + V'$ für alle $b \in B'' := B \smallsetminus B'$ eine Basis von V/V'. Somit bilden die Elemente $(b + V') \otimes c$ für alle $(b, c) \in B'' \times C$ eine Basis von $(V/V') \otimes_K W$. Der Klarheit wegen betrachte die Teilmengen

$$\begin{aligned} \tilde{B} &:= \{b \otimes c \mid (b, c) \in B \times C\}, \\ \tilde{B}' &:= \{b \otimes c \mid (b, c) \in B' \times C\}, \\ \tilde{B}'' &:= \{b \otimes c \mid (b, c) \in B'' \times C\} \end{aligned}$$

von $V \otimes_K W$. Dann ist $\tilde{B}$ eine Basis von $V \otimes_K W$ und $\tilde{B}'$ eine Basis des Unterraums $V' \otimes_K W$, und es gilt $\tilde{B} = \tilde{B}' \sqcup \tilde{B}''$. Nach Konstruktion gilt für alle $(b, c) \in B \times C$

$$\rho(b \otimes c) = \begin{cases} (b + V') \otimes c & \text{falls } b \in B'', \\ 0 & \text{falls } b \in B', \text{ da dann } \pi(b) = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Also bildet ρ die Basis $\tilde{B}'$ von $V' \otimes_K W$ auf 0, aber die Basis $\tilde{B}''$ eines Komplements bijektiv auf eine Basis von $(V/V') \otimes_K W$ ab. Deshalb ist ρ surjektiv mit Kern $V' \otimes_K W$. Nach Serie 11 Aufgabe 1d induziert ρ somit den gewünschten Isomorphismus.

Da schliesslich ρ von keiner Wahl abhängt, sind ρ und der so gefundene Isomorphismus natürlich.

*32. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und p eine natürliche Zahl. Ein Element von $\bigwedge^p V$ der Form $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ für Vektoren $v_1, \ldots, v_p \in V$ heisst *rein*. Betrachte ein beliebiges nicht-verschwindendes Element $\alpha \in \bigwedge^p V$. Zeige: Der Kern der Abbildung

$$f_\alpha\colon V \to \bigwedge^{p+1} V,\ v \mapsto v \wedge \alpha$$

hat Dimension $\leqslant p$, und es gilt Gleichheit genau dann, wenn α rein ist.

Lösung: Wähle eine Basis $(e_1, \ldots, e_k)$ von $\mathrm{Kern}(f_\alpha)$ und erweitere sie zu einer Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V. Dann bilden die Elemente $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ für alle Indices $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ eine Basis von $\Lambda^p V$. Folglich existieren eindeutige Koeffizienten $\alpha_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1 \ldots i_p}\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}\,.$$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt dann nach Konstruktion

$$0 = e_j \wedge \alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1 \ldots i_p}\, e_j \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

Hier ist nun aber $e_j \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} = 0$ im Fall $j \in \{i_1, \ldots, i_p\}$, und andernfalls ist es gleich $\pm$ eines der entsprechenden Basiselemente von $\bigwedge^{p+1} V$. Da letztere linear unabhängig sind, folgt daraus

$$\alpha_{i_1 \ldots i_p} = 0 \quad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \text{ mit } j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}.$$

Kontrapositiv gesagt bedeutet dies

$$j \in \{i_1, \ldots, i_p\} \qquad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \text{ mit } \alpha_{i_1 \ldots i_p} \neq 0.$$

Da $j \in \{1, \ldots, k\}$ beliebig war, gilt also

$$(*) \qquad \{1, \ldots, k\} \subset \{i_1, \ldots, i_p\} \qquad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \text{ mit } \alpha_{i_1 \ldots i_p} \neq 0.$$

Wegen $\alpha \neq 0$ gibt es mindestens ein solches $\alpha_{i_1 \ldots i_p} \neq 0$, und für dieses folgt $\dim \mathrm{Kern}(f_\alpha) = k \leqslant p$, die erste zu beweisende Aussage.

Andererseits impliziert $(*)$, dass

$$\alpha = e_1 \wedge \ldots \wedge e_k \wedge \eta$$

ist für ein $\eta \in \Lambda^{p-k} V \smallsetminus \{0\}$. Im Fall $\dim \mathrm{Kern}(f_\alpha) = k = p$ ist dann $\eta \in \Lambda^0 V = K$ ein Skalar, also $\alpha = (\eta v_1) \wedge \ldots \wedge v_p$ rein.

Sei schliesslich umgekehrt $\alpha = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \in \Lambda^p V$ ein nicht-verschwindendes reines Element. Nach Serie 26, Aufgabe 2c sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ dann linear unabhängig. Nach Serie 26, Aufgabe 4 ist weiter $\mathrm{Kern}(f_\alpha) = \langle v_1, \ldots, v_p \rangle$, also gilt $\dim \mathrm{Kern}(f_\alpha) = p$, was zu zeigen war.

33. Betrachte eine 4×2-Matrix $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant 4,\, 1 \leqslant j \leqslant 2}$ und bezeichne ihre 2×2-Minoren mit $M_{ij} := \det \left(\begin{smallmatrix} m_{i1} & m_{i2} \\ m_{j1} & m_{j2} \end{smallmatrix}\right)$ für alle $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

Existiert eine reelle 4×2-Matrix M mit $(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})$ gleich

(a) $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$?

(b) $(3, 4, 5, 6, 7, 8)$?

(c) $(1, 5, 3, 3, 2, 1)$?

(*Hinweis:* Rechne in $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$!)

Lösung: Sei (e_1, e_2, e_3, e_4) die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

Ist $M = (v_1\ v_2)$ mit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ eine 4×2-Matrix mit den 2×2-Minoren M_{ij} für alle $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, so folgt aus direktem Nachrechnen

$$v_1 \wedge v_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} M_{ij} e_i \wedge e_j\,.$$

Umgekehrt ist jedes *reine* äussere Produkt $\alpha \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4$ von dieser Form. Wir müssen also prüfen ob die Elemente

(a) $\alpha_1 := 2e_1 \wedge e_2 + 3e_1 \wedge e_3 + 4e_1 \wedge e_4 + 5e_2 \wedge e_3 + 6e_2 \wedge e_4 + 7e_3 \wedge e_4$

(b) $\alpha_2 := 3e_1 \wedge e_2 + 4e_1 \wedge e_3 + 5e_1 \wedge e_4 + 6e_2 \wedge e_3 + 7e_2 \wedge e_4 + 8e_3 \wedge e_4$

(c) $\alpha_3 := 1e_1 \wedge e_2 + 5e_1 \wedge e_3 + 3e_1 \wedge e_4 + 3e_2 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_4 + 1e_3 \wedge e_4$

rein sind. Nach Serie 26, Aufgabe 6b ist ein Element $\alpha \in \Lambda^2\mathbb{R}^4$ rein genau dann, wenn $\alpha^2 = 0$ ist. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \wedge \alpha_1 &= 2 \cdot \Big(2 \cdot 7 \cdot (e_1 \wedge e_2) \wedge (e_3 \wedge e_4) + 3 \cdot 6 \cdot (e_1 \wedge e_3) \wedge (e_2 \wedge e_4) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 4 \cdot 5 \cdot (e_1 \wedge e_4) \wedge (e_2 \wedge e_3)\Big) \\
&= 2 \cdot \big(2 \cdot 7 - 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5\big) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \\
&= 32 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0 \\
\alpha_2 \wedge \alpha_2 &= 2 \cdot \big(3 \cdot 8 - 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6\big) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \\
&= 52 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0 \\
\alpha_3 \wedge \alpha_3 &= 2 \cdot (1 - 10 + 9) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = 0\,.
\end{aligned}$$

Also existiert eine 4×2-Matrix mit den angegebenen Minoren im Fall (c), aber nicht in den Fällen (a) und (b).

34. Zeige: Für je zwei K-Vektorräume V und W und für jedes $k \geqslant 0$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\boxplus_{i+j=k} \Big(\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W\Big) \;\cong\; \bigwedge^k (V \boxplus W)\,.$$

Lösung: Seien $\iota_V \colon V \to V \boxplus W$, $v \mapsto (v,0)$ und $\iota_W \colon W \to V \boxplus W$, $w \mapsto (0,w)$ die natürlichen Inklusionen. Für jedes $i + j = k$ betrachte die Abbildung

$$\varphi_{ij} : V^i \times W^j \xrightarrow{(\iota_V^{\times i}, \iota_W^{\times j})} (V \boxplus W)^k \xrightarrow{\kappa} \bigwedge^k (V \boxplus W),$$

wobei κ die universelle alternierende Abbildung bezeichnet. Da κ alternierend ist, gilt für alle $v_1, \ldots, v_i \in V$ und $w_1, \ldots, w_j \in W$

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij}(v_1, \ldots, v_i, w_1, \ldots, w_j) &= \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi_{ij}(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(i)}, w_1, \ldots, w_j) \\
&= \operatorname{sgn}(\tau)\varphi_{ij}(v_1, \ldots, v_i, w_{\tau(1)}, \ldots, w_{\tau(j)}),
\end{aligned}$$

für alle $\sigma \in S_i$ und $\tau \in S_j$. Durch Anwenden der universellen Eigenschaft von $(\wedge^i V, \kappa_V)$ und $(\wedge^j W, \kappa_W)$ erhalten wir eine Abbildung

$$\psi_{ij} : \bigwedge^i V \times \bigwedge^j W \to \bigwedge^k (V \boxplus W)$$

mit $\varphi_{ij} = \psi_{ij} \circ (\kappa_V, \kappa_W)$. Aus der Multilinearität von φ_{ij} folgt durch direktes Nachprüfen, dass ψ_{ij} bilinear ist. Mit der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes $(\wedge^i V \otimes \wedge^j W, t)$ erhält man somit eine Abbildung

$$\eta_{ij} \colon \bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W \to \bigwedge^k (V \boxplus W)$$

mit $\psi_{ij} = \eta_{ij} \circ t$. Betrachte die induzierte Abbildung

$$E = \boxplus_{i+j=k} \eta_{ij} \;:\; \boxplus_{i+j=k} \Big(\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W\Big) \to \bigwedge^k (V \boxplus W)\,.$$

Wir zeigen die Abbildung E ist ein Isomorphismus.

Sei B eine geordnete Basis von V und sei B' eine geordnete Basis von W. Dann ist für jedes i

$$b_1 \wedge \ldots \wedge b_i \quad \text{für alle } b_\ell \in B \text{ mit } b_1 < \ldots < b_i \text{ eine Basis von } \bigwedge^i V,$$

und für jedes j

$$b'_1 \wedge \ldots \wedge b'_j \quad \text{für alle } b'_\ell \in B' \text{ mit } b'_1 < \ldots < b'_j \text{ eine Basis von } \bigwedge^j W\,.$$

Somit ist

$$(b_1 \wedge \ldots \wedge b_i) \otimes (b'_1 \wedge \ldots \wedge b'_j)$$
$$\text{für alle } b_\ell \in B \text{ mit } b_1 < \ldots < b_i \text{ und für alle } b'_\ell \in B' \text{ mit } b'_1 < \ldots < b'_j$$

eine Basis von $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$. Wenn $\mathrm{incl}_{ij} : \wedge^i V \otimes \wedge^j W \to \boxplus_{i'+j'=k} \left(\wedge^{i'} V \otimes \wedge^{j'} W\right)$ die natürliche Inklusion bezeichnet, ist also

$$\mathrm{incl}_{ij}\Big((b_1 \wedge \ldots \wedge b_i) \otimes (b'_1 \wedge \ldots \wedge b'_j)\Big) \quad \text{für alle } i+j=k,$$
$$\text{für alle } b_\ell \in B \text{ mit } b_1 < \ldots < b_i, \text{ für alle } b'_\ell \in B' \text{ mit } b'_1 < \ldots < b'_j$$

eine Basis von $\boxplus_{i+j=k} \Big(\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W\Big)$.

Andererseits ist

$$B'' := \big\{(b,0)\,\big|\, b \in B\big\} \,\cup\, \big\{(0,b')\,\big|\, b' \in B'\big\}$$

zusammen mit der Ordnung

$$\begin{aligned}
(b_1,0) < (b_2,0) \;&\Leftrightarrow\; b_1 < b_2 && \text{für alle } b_1, b_2 \in B\\
(b,0) < (0,b') \;& && \text{für alle } b \in B, b' \in B'\\
(0,b'_1) < (0,b'_2) \;&\Leftrightarrow\; b'_1 < b'_2 && \text{für alle } b'_1, b'_2 \in B'
\end{aligned}$$

eine geordnete Basis von $V \oplus W$, also

$$(b_1,0) \wedge \ldots \wedge (b_i,0) \wedge (0,b'_1) \wedge \ldots \wedge (0,b'_j) \quad \text{für alle } i+j=k,$$
$$\text{für alle } b_\ell \in B \text{ mit } b_1 < \ldots < b_i, \text{ für alle } b'_\ell \in B' \text{ mit } b'_1 < \ldots < b'_j$$

eine Basis von $\bigwedge^k (V \boxplus W)$. Wir zeigen, dass E die eine gewählte Basis bijektiv auf die andere abbildet:

Für alle $i + j = k$ und für alle $b_1, \ldots, b_i \in B$ mit $b_1 < \cdots < b_i$ und für alle $b'_1, \ldots, b_j \in B'$ mit $b'_1 < \ldots < b'_j$ gilt

$$\begin{aligned}
&E\left(\mathrm{incl}_{ij}\big((b_1 \wedge \ldots \wedge b_i) \otimes (b'_1 \wedge \ldots \wedge b'_j)\big)\right)\\
&= \eta_{ij}\big((b_1 \wedge \ldots \wedge b_i) \otimes (b'_1 \wedge \ldots \wedge b'_j)\big)\\
&= \eta_{ij} \circ t\big(b_1 \wedge \ldots \wedge b_i\,, b'_1 \wedge \ldots \wedge b'_j\big)\\
&= \psi_{ij}\big(b_1 \wedge \ldots \wedge b_i\,, b'_1 \wedge \ldots \wedge b'_j\big)\\
&= \psi_{ij} \circ (\kappa_V, \kappa_W)(b_1, \ldots, b_i, b'_1, \ldots, b'_j)\\
&= \varphi_{ij}\big(b_1, \ldots, b_i, b'_1, \ldots, b'_j\big)\\
&= \kappa\big((b_1,0), \ldots, (b_i,0), (0,b'_1), \ldots, (0,b'_j)\big)\\
&= (b_1,0) \wedge \ldots \wedge (b_i,0) \wedge (0,b'_1) \wedge \ldots \wedge (0,b'_j)\,.
\end{aligned}$$

Also bildet E die Basis von $\boxplus_{i+j=k} \left(\wedge^i V \otimes \wedge^j W\right)$ bijektiv auf die Basis von $\wedge^k (V \boxplus W)$ ab, ist also ein Isomorphismus.