D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS22
Prof. Urs Lang

Serie 1

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:
   (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$,
   (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$,
   (c) $y'' + y' + y = 0$.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

3. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -10,\ y(0) = 12,\ y'(0) = -2.$$

4. Wir betrachten $a < b$ in $\mathbb{R}$, eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und den *Rotationskörper*

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant \sqrt{y^2+z^2} \leqslant f(x)\right\},$$

und definieren das *Volumen des Rotationskörpers* durch

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

und die *Oberfäche* durch

$$2\pi \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} f(x) dx.$$

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des „uneigentlichen Rotationskörpers“, der entsteht, wenn man das Gebiet unter dem Graphen der Funktion $x \in [1,\infty)$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ um die x-Achse rotiert.

Bemerkung: Vergleichen Sie Kapitel 9.7.4 und 9.7.5 für eine Herleitung der obigen Formeln.

5. Für eine reguläre ebene C^2-Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$, definiert man die *Krümmung* an der Stelle t durch

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{\|\dot\gamma(t)\|^3} = \frac{\dot x(t)\ddot y(t) - \dot y(t)\ddot x(t)}{\|\dot\gamma(t)\|^3}.$$

(a) Berechnen Sie die Krümmung der Kurven $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ $(r > 0)$ und $t \mapsto (t, \sin(t))$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Wie verhält es sich mit dem Vorzeichen der Krümmung?

(b) Zeigen Sie: Ist $\gamma \circ \psi \colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^2$ eine C^2-Reparametrisierung von $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, so gilt $\kappa_{\gamma\circ\psi}(s) = \kappa_\gamma(\psi(s))$ für alle $s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

6. (Traktrix/Schleppkurve). Eine stetig differenzierbare Funktion $x \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $t \mapsto x(t)$, werde so gewählt, dass $x(0) = 0$ gilt und die Kurve $\gamma \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), e^{-t})$, nach Bogenlänge parametrisiert sei.

(a) Bestimmen Sie $t \mapsto x(t)$ und skizzieren Sie die Kurve γ.

Hinweis: Die zweite Komponente von $\gamma(t) + \dot{\gamma}(t)$ ist stets null. Was bedeutet dies geometrisch?

(b) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa_\gamma(t)$ für $t > 0$ und untersuchen Sie das Verhalten für $t \to 0$ und $t \to \infty$.