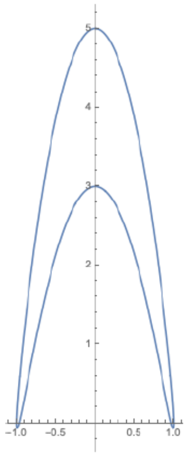
Serie 11

1. Die Randkurve ∂B des Bumerangs B (siehe die Zeichnung unten) kann durch
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ 4\cos^2 t + \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$
parametrisiert werden. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Green den Schwerpunkt von B.



2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des sphärischen Vierecks $S \subset \mathbb{S}^2$ begrenzt durch die Längengrade $-\pi < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$ und Breitengrade $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$.

3. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld
$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto g(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}$$
divergenzfrei?

Hinweis: Betrachten Sie unter der Annahme, dass f divergenzfrei ist, die Flussintegrale $\int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ für $r \in (0,\infty)$.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein geschlossener, stetig differenzierbarer Weg und $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$ ein Punkt ausserhalb der Spur $\gamma([a,b])$ von γ. Dann definieren wir die *Umlaufzahl von γ um u* durch
$$I_\gamma(u) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\langle \gamma(t) - u, R^{-1}\dot\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t) - u\|_2^2}\mathrm{d}t,$$

wobei $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Rotationsmatrix um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet.

Wir betrachten nun speziell den Weg $\gamma_r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto r\left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$ für ein $r > 0$, welcher den Rand des r-Balls $B_r(0)$ in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert. Zeigen Sie für $u \notin \partial B_r(0)$, dass

$$I_{\gamma_r}(u) = \begin{cases} 1, & u \in B_r(0), \\ 0, & u \notin \overline{B_r(0)}. \end{cases}$$

Bemerkung: Auch für allgemeinere einfach geschlossene Wege γ kann die Umlaufzahl $I_\gamma(u)$ verwendet werden um zu entscheiden, ob u im „Inneren“ oder „Äusseren“ von γ liegt. Im Allgemeinen ist jedoch sogar die Definition letzterer Konzepte nichttrivial; siehe die Diskussion des *Jordanschen Kurvensatzes* in Abschnitt 14.1.6 des Skripts.

5. (Eine Charakterisierung von Orientierbarkeit). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ein stetiges *normiertes Normalenfeld* ist eine stetige Abbildung $n : S \to \mathbb{R}^3$ mit $n(p) \perp T_pS$ und $\|n(p)\| = 1$ für alle $p \in S$. Zeigen Sie, dass S genau dann orientierbar ist, falls ein stetiges Normalenfeld existiert.

6. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ und $f_3(x, y, z) = z$ durch das Paraboloid

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

von oben nach unten auf zwei Arten:

(a) direkt anhand der Definition von Flussintegralen durch Flächen;

(b) unter Verwendung des Divergenzsatzes im dreidimensionalen Raum.