D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS22
Prof. Urs Lang

Serie 12

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset U$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich und $\mathbf{n}\colon \partial B \to \mathbb{R}^2$ ein normiertes Aussennormalenfeld auf B. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u auf U definieren wir die *Aussennormalableitung* $\partial_{\mathbf{n}}$ via

$$\partial_{\mathbf{n}} u = \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle \colon \partial B \to \mathbb{R}.$$

Seien nun $f\colon B \to \mathbb{R}$ und $g\colon \partial B \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Das Problem, eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u\colon U \to \mathbb{R}$ zu finden mit

$$\begin{cases} \Delta u|_B = f, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g, \end{cases}$$

wird als *Neumannschens Randwertproblem* bezeichnet. Verwenden Sie den Divergenzsatz um zu zeigen, dass das Neumannsche Randwertproblem nur dann eine Lösung besitzen kann, wenn

$$\int_B f \mathrm{dvol} = \int_{\partial B} g \mathrm{d}s.$$

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Wir erinnern daran, dass wir mit $\nabla\varphi$ den Gradienten von φ bezeichnen. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

   (a) $\operatorname{rot}(\varphi f) = (\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$,

   (b) $\operatorname{div}(\varphi f) = (\nabla\varphi) \cdot f + \varphi \operatorname{div} f$,

   (c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$,

   (d) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$.

3. Sei $0 < d < 1$ und sei S jener Teil von $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, welcher $z > -d$ erfüllt. Sei $f(x, y, z) = (-y, x, 0)^t$ und $v = \operatorname{rot} f$. Berechnen Sie den Fluss $\int_S v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ nach aussen wie folgt:

   (a) direkt,

   (b) mit dem Satz von Stokes,

   (c) mit dem Satz von Gauss.

4. Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2(xz+y)}{x^2+y^2}, \frac{2(yz-x)}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2) \right)^t$$

und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)^t, \\ \gamma_2(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), 2)^t \\ \gamma_3(t) &= (3\cos(t)+6, 3\sin(t), 3)^t. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ von f und das Wegintegral $\int_{\gamma_1} f \cdot d\mathbf{s}$ von f entlang γ_1. Ist f konservativ?

(b) Erklären Sie, wie aus dem Satz von Stokes folgt, dass $\int_{\gamma_1} f \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_2} f \cdot d\mathbf{s}$.

(c) Folgt aus dem Satz von Stokes auch, dass $\int_{\gamma_1} f \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_3} f \cdot d\mathbf{s}$?

5. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x,y,z) = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)^t.$$

Für welche Werte von α, β, γ ist f rotationsfrei? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von f.

6. (Sternförmige Gebiete und Homotopien). Sei U ein sternförmiges Gebiet und seien γ_0, $\gamma_1\colon [0,1] \to U$ zwei Wege in U mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Finden Sie eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1.