Serie 13

1. (a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, und seien $\Phi\colon U \to V$ und $\tilde{\Phi}\colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ zwei lokale Parametrisierungen, d.h. Diffeomorphismen offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $\Phi(V \cap \mathbb{R}^k) = U \cap M$ und $\tilde{\Phi}(\tilde{V} \cap \mathbb{R}^k) = \tilde{U} \cap M$ (wobei $\mathbb{R}^k$ für $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ steht). Weiter sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Gibt es (in $\mathbb{R}^k$) Jordan-messbare Mengen $K \subset V \cap \mathbb{R}^k$ und $\tilde{K} \subset \tilde{V} \cap \mathbb{R}^k$ mit $\Phi(K) = \tilde{\Phi}(\tilde{K})$, so gilt

$$\int_K f \circ \Phi \sqrt{\mathrm{gram}_k(D\Phi)}\, d\mathrm{vol}_k = \int_{\tilde{K}} f \circ \tilde{\Phi} \sqrt{\mathrm{gram}_k(D\tilde{\Phi})}\, d\mathrm{vol}_k.$$

   (b) Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen der Sphäre $M = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ mittels einer Verallgemeinerung von Kugelkoordinaten.

2. (Zwei separierbare Gleichungen)

   (a) Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\sqrt{1-x^2}\, y' - y^2 = 1, \quad y(0) = 0.$$

   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x} + e^x = 1, \\ x(0) = \log(2). \end{cases}$$

3. Verwenden Sie die Substitution $u = x/t$ zur Bestimmung der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} t^2\dot{x} - tx - x^2 = t^2, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

4. (Lineare Unabhängigkeit) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ genau d (das heisst, paarweise verschiedene) komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die komplexwertigen Funktionen

$$f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha_k x} \in \mathbb{C}$$

für $k = 1, \ldots, d$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind.

5. Sei $p(T) \in \mathbb{C}[T]$. Zeigen Sie: Ist $q(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom vom Grad n und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine l-fache Nullstelle von p für ein $l \geqslant 0$, so führt der Ansatz $y_{\text{part}} = Q(x)x^l \mathrm{e}^{\alpha x}$ für ein Polynom $Q[T] \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad n zu einer partikularen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$p(D)(y) = q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

Hinweis: Vergleiche Übung 15.10 im Skript.

6. (Mehrfache Nullstellen) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $p(D)y = x + e^x + \sin(2x)$ wobei das Polynom $p(T) \in \mathbb{R}[T]$ durch $p(T) = (T-1)^2(T^2+4)$ gegeben ist. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

   (a) Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung von $p(D)y_0 = 0$.

   (b) Finden Sie ein Polynom $q_1(T) \in \mathbb{R}[T]$, so dass $y_1 = q_1(x)$ die inhomogene Differentialgleichung $p(D)y_1 = x$ löst (und multiplizieren Sie hierfür $p(T)$ aus).

   (c) Finden Sie als nächstes ein Polynom $q_2(T) \in \mathbb{R}[T]$, so dass $y_2 = q_2(x)e^x$ eine Lösung von $p(D)y_2 = e^x$ ist.

   (d) Finden Sie schlussendlich zwei Polynome $q_3(T), q_4(T) \in \mathbb{R}[T]$, so dass für die Funktion $y_3 = q_3(x)\sin(2x) + q_4(x)\cos(2x)$ die Gleichung $p(D)y_3 = \sin(2x)$ gilt.

   (e) Nehmen Sie die Summe von all diesen Funktionen (welche auf Grund der Funktion y_0 vier unbestimmte Konstanten enthalten wird).