D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS 2022
Prof. Urs Lang

Serie 14

Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subset X$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$

(b) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \supset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

(c) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

2. Wir betrachten den metrischen Raum (X, d), wobei $X = (0, \infty)$ und d die euklidische Metrik ist, und die Teilmenge $Y = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset X$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) Y ist abgeschlossen in X.

(b) $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$.

(c) Y ist zusammenhängend.

(d) Y besitzt keine Häufungspunkte in X.

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen über die Abstandsfunktion $\mathrm{d}(\cdot, Y)$ gelten im Allgemeinen?

(a) Ist Y abgeschlossen und $x \in Y^c$, so gilt $\mathrm{d}(x, Y) > 0$.

(b) Die Menge $A = \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, Y) \geq 1\}$ ist abgeschlossen in X.

(c) Für $x, x' \in X$ gilt $\mathrm{d}(x, Y) \leq \mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(x', Y)$.

(d) Ist Y° nichtleer und ist $x \in X$, so gilt $\mathrm{d}(x, Y) = \mathrm{d}(x, Y^\circ)$.

4. Welche der folgenden Aussagen über vollständige metrische Räume gelten im Allgemeinen?

(a) Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.

(b) Jede Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.

(c) Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist vollständig.

(d) Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.

5. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

(b) Abzählbare Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

(c) Beliebige Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

(d) Endliche Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

(e) Abzählbare Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

(f) Beliebige Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

(b) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, so ist f in x_0 stetig.

(c) Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf ganz U, so ist f auf U differenzierbar.

(d) Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf ganz U und sind diese stetig, so ist f auf U differenzierbar.

(e) Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen von f in x_0.

(f) Ist f auf ganz U differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen von f auf U und diese sind stetig.

7. Die Hesse-Matrix $H(x_0)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in einem kritischen Punkt x_0 von f *positiv semidefinit*, d.h. es gelte $\langle v, H(x_0)v\rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann notwendigerweise?

(a) x_0 ist ein striktes lokales Minimum von f.

(b) x_0 ist ein (möglicherweise nicht striktes) lokales Minimum von f.

(c) x_0 ist kein lokales Maximum von f.

(d) Keine der obigen Aussagen.

8. Welche der folgenden Sätze gelten auch im $\mathbb{R}^n$?

(a) *Der Zwischenwertsatz:* Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f\colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) < 0$ und $f(y) > 0$ für zwei Punkte $x, y \in C$, so existiert ein $z \in C$ mit $f(z) = 0$.

(b) *Der Mittelwertsatz:* Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

9. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist U konvex, so ist U sternförmig.

(b) Ist U konvex, so ist U wegzusammenhängend.

(c) Ist U sternförmig, so ist U wegzusammenhängend.

(d) Ist U sternförmig, so ist U konvex.

(e) Ist U wegzusammenhängend, so ist U sternförmig.

10. Welche der folgenden Aussagen über reguläre und kritische Werte bzw. Punkte gelten im Allgemeinen?

(a) Jeder Punkt im Urbild eines regulären Wertes ist ein regulärer Punkt.

(b) Das Bild eines kritischen Punktes ist ein kritischer Wert.

(c) Jeder Punkt im Urbild eines kritischen Wertes ist ein kritischer Punkt.

(d) Das Bild eines regulären Punktes ist ein regulärer Wert.

11. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Differential in jedem Punkt invertierbar ist. Welche der folgenden Aussagen gelten dann im Allgemeinen?

(a) f ist injektiv.

(b) f ist lokal injektiv.

(c) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und die Einschränkung $f|_U$ injektiv, so ist $f(U)$ offen und $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.

12. Welche der folgenden Aussagen über Teilmannigfaltigkeiten gelten im Allgemeinen?

(a) Jede Teilmenge einer Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(b) Sei M eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $N \subset M$ offen in M. Dann ist N selbst eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

(c) Das kartesische Produkt einer k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und einer l-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.

(d) Der Durchschnitt zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(e) Die Vereinigung zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

13. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein *regulärer* glatter Weg, der zusätzlich $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Anders ausgedrückt ist γ also eine reguläre glatte Schlaufe, bei der sich Anfang und Ende auf glatte Weise zusammenfügen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Für jedes $t \in (0,1)$ existiert ein offenes Teilintervall $J \subset (0,1)$ mit $t \in J$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Es existiert eine Teilmenge $J \subset [0,1]$ der Form $J = [0,a) \cup (b,1]$ für gewisse $a, b \in (0,1)$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

(c) Das Bild $\gamma([0,1])$ ist eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(d) Ist γ zusätzlich *einfach* (vgl. Abschnitt 9.7.2), so ist das Bild $\gamma([0,1])$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

14. Ist die Menge $G = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge?

(a) Ja.

(b) Nein.

15. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N \subset U$ eine Nullmenge. In welchen der folgenden Fälle ist das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^m$ notwendigerweise eine Nullmenge?

(a) Falls f stetig ist.

(b) Falls f gleichmässig stetig ist.

(c) Falls f Lipschitz-stetig ist.

(d) Falls f gleichmässig stetig ist und $m \geq n$.

(e) Falls f Lipschitz-stetig ist und $m \geq n$.

(f) Falls f lokal Lipschitz-stetig ist (vgl. Definition 11.16) und $m \geq n$.

16. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren und $f \colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen über die (Sub-) Niveaumengen $N_{\leq a} = \{x \in Q \mid f(x) \leq a\}$ und $N_{=a} = \{x \in Q \mid f(x) = a\}$ von f gelten im Allgemeinen?

(a) $N_{=a}$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

(b) Ist $N_{=a}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar.

(c) $N_{\leq a}$ ist für fast alle $a \in \mathbb{R}$ Jordan-messbar.

(d) Ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar, so ist auch $N_{=a}$ Jordan-messbar.

17. Welche der folgenden Mengen sind glatt berandet?

(a) Ein einzelner Punkt $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Eine nichtleere $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$.

(c) Der abgeschlossene n-dimensionale Einheitsball.

(d) Ein Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ im $\mathbb{R}^2$ für reelle Zahlen $a < b$ und $c < d$.

(e) Der Bereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ zwischen den Graphen zweier glatter Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1 < \varphi_2$.

18. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $0 \in U$, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und

$$I_r = \int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$$

der Fluss von f durch den Rand des r-Balles $B_r(0)$. Welche der folgenden Asymptotiken gelten im Allgemeinen für $r \searrow 0$?

(a) $I_r = \operatorname{div}(f)(0) + o(1)$

(b) $I_r = o(r)$

(c) $I_r = r^2\pi \operatorname{div}(f)(0) + o(r^2)$

(d) $I_r = O(r^3)$

19. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges (oder allgemeiner, einfach zusammenhängendes) Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Eigenschaften sind dann im Allgemeinen äquivalent zur Konservativität von f?

(a) f besitzt ein Potential.

(b) f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen.

(c) f ist divergenzfrei.

(d) Falls $n = 2$ oder $n = 3$: f ist rotationsfrei.

20. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ treffen im Allgemeinen zu?

(a) Jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_2 = \infty$ wächst für $t \to \infty$ exponentiell.

(b) Genau dann existiert eine nichttriviale konstante Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, wenn A nichttrivialen Kern besitzt.

(c) Ist A reell diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.

(d) Ist A komplex diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.

(e) Haben alle Eigenwerte von A (strikt) negativen Realteil, so gilt für jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Asymptotik $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_2 = 0$.