D-MATH, D-PHYS, D-CHAB   Analysis II   FS22
Prof. Urs Lang

Serie 3

1. Sei $\alpha > 1$. Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz und dessen Beweis, um zu zeigen, dass die durch
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + \alpha}, \quad \text{für } n \geqslant 2,\ x_1 = 0$$
rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

2. (Urysohn's Lemma). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir möchten zeigen, dass sich disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X mit einer stetigen Funktion „trennen“ lassen. Seien also $A, B \subseteq X$ abgeschlossene, nicht-leere, disjunkte Teilmengen. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$ existiert. Betrachten Sie dazu die Funktion
$$x \in X \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$
und verifizieren Sie auch, dass diese wohldefiniert ist.

3. Sei X ein metrischer Raum. Beweisen Sie folgende Aussagen ohne auf Satz 10.53 zurückzugreifen.
   (a) Ist X folgenkompakt, so besitzt X eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.
   (b) Erfüllt X das Schachtelungsprinzip, so ist X überdeckungskompakt.
   (c) Ist X überdeckungskompakt, so nimmt jede stetige, reellwertige Funktion ein Maximum und ein Minimum an.

4. In dieser Übung möchten wir zeigen, dass für gewisse stetige, bijektive Funktion auch deren Inverse stetig ist.
   (a) Wir beginnen mit einem Gegenbeispiel zur allgemeinen Aussage. Finden Sie metrische Räume X, Y und eine bijektive, stetige Abbildung $f\colon X \to Y$, so dass f^{-1} nicht stetig ist.
   (b) Seien X,Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ bijektiv und stetig. Zeigen Sie, dass f^{-1} stetig ist, falls X kompakt ist.

5. (Alle Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent). Sei $d \geqslant 1$ und seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$. Wir möchten in folgenden Schritten zeigen, dass $\|\cdot\|$,und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind.

(a) Erklären Sie, wieso Sie annehmen können, dass $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$die Einsnorm ist.

(b) Finden Sie eine Konstante $C > 0$ mit $\|x\| \leqslant C\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Schliessen Sie daraus auch, dass $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine bezüglich der euklidischen Metrik d_2 stetige Abbildung ist.

(c) Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_1 = 1\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf A ein Minimum annimmt.

(d) Verwenden Sie (c) um eine Konstante $C' > 0$ mit $C'\|x\|_1 \leqslant \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ zu finden und schliessen Sie damit auf die zu beweisende Aussage.

6. (Hilbert-Schmidt-Norm). Zeigen Sie, dass $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ definiert. Die induzierte Norm nennt man die *Hilbert-Schmidt-Norm* auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Identifizieren Sie die dazugehörige Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$.