Serie 4

1. (Summen- und Produktregel) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}^m$ Funktionen. Angenommen f_1 und f_2 sind differenzierbar bei $x_0 \in U$.

   (a) Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und
   $$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 + f_2) = \mathrm{D}_{x_0} f_1 + \mathrm{D}_{x_0} f_2$$
   erfüllt.

   (b) Sei jetzt $m = 1$. Zeigen Sie, dass $f_1 \cdot f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und
   $$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 f_2) = f_2(x_0)\mathrm{D}_{x_0} f_1 + f_1(x_0)\mathrm{D}_{x_0} f_2$$
   erfüllt.

   (c) Verallgemeinern Sie (b) auf das Skalarprodukt $\langle f_1, f_2 \rangle$, wobei $m \geqslant 1$ wieder beliebig ist.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \\ (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f nicht überall stetig sind.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass sämtliche Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren.

   (b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

4. Zeigen Sie, dass die Inversion an der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, also die Abbildung
   $$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{\|x\|^2} x,$$
   differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix proportional zu einer orthogonalen Matrix ist. Was ist die geometrische Deutung?

5. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = xyz + 3e^x y$$

im Punkt $(0, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung: Da nach einer *Richtung* gefragt ist, sollte die Lösung ein Einheitsvektor sein.

6. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 - y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Differential $\mathrm{D}_{(x,y)}(g \circ f)$ auf zwei Arten:

(a) indem Sie zuerst explizit die Komposition $g \circ f$ berechnen;

(b) unter Verwendung der Kettenregel.