D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS22
Prof. Urs Lang

Serie 5

1. (Notwendigkeit der Annahmen im Satz von Schwarz) In dieser Übung betrachten wir eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren partielle Ableitungen $\partial_1\partial_2 f$, $\partial_2\partial_1 f$ beim Punkt $(0,0)$ nicht stetig sind und dort verschiedene Werte haben. Dies zeigt, dass die Annahme der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit im Satz von Schwarz (Satz 11.20) notwendig war.

   Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert für alle für $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass f zweimal differenzierbar ist. Überzeugen Sie sich dazu zuerst davon, dass f stetig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\partial_{xy} f$ und $\partial_{yx} f$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind.

   (c) Zeigen Sie, dass $\partial_{xy} f(0,0) = -\partial_{yx} f(0,0) = 1$ gilt.

2. Bestimmen Sie die Taylor-Approximation 2. Ordnung der Funktion

$$f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$$

   im Punkt $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

3. (Satz von Taylor in Multiindexnotation) Zeigen Sie die folgende Umformulierung der mehrdimensionalen Taylor-Approximation.

   Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(d+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x+h) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n : \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \leqslant d} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) h^{\boldsymbol{\alpha}} + R^f_{x,d}(h)$$

   wobei

$$R^f_{x,d}(h) = (d+1) \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n : \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = d+1} h^{\boldsymbol{\alpha}} \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{\boldsymbol{\alpha}!} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f(x+th) dt.$$

   Erinnerung: für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ und $h \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $h^{\boldsymbol{\alpha}} = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$, $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ sowie $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$.

4. Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy$ zu $\alpha \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Extremum handelt und wenn ja, ob ein lokales Minimum oder Maximum angenommen wird.

5. Im $\mathbb{R}^n$ seien k Punkte $y_1, \ldots, y_k$ gegeben. Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, für den
$$f(x) = \|x - y_1\|^2 + \ldots + \|x - y_k\|^2$$
minimal wird und bestimmen Sie diesen Punkt.

6. Zeigen Sie, dass das vollständige elliptische Integral zweiter Art
$$E : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2(t)}dt$$
der Differentialgleichung
$$(x^2 - 1)xE''(x) + (x^2 - 1)E'(x) - xE(x) = 0$$
genügt.