Serie 6

1. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige:

   (a) (Schlaufencharakterisierung) f ist genau dann konservativ, wenn das Wegintegral von f entlang jeder stückweise stetig differenzierbaren Schlaufe verschwindet.

   (b) Ist F ein Potential von f, so ist eine weitere Funktion $\tilde{F} \in C^1(U, \mathbb{R})$ genau dann ein Potential von f, falls eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{F} = F + c$ existiert.

2. Für welchen Wert von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda x e^y \\ (y + 1 + x^2)e^y \end{pmatrix}$$

   für $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ konservativ? Bestimmen Sie für diesen Wert ein Potential von f.

3. Im Beweis des Satzes über implizite Funktionen kam der Banachsche Fixpunktsatz zum ersten Mal zur Anwendung. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen letzteren Satzes notwendig sind, indem sie je ein Beispiel für die folgenden Phänomene angeben:

   (a) ein nicht-vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Lipschitz-Kontraktion $f : X \to X$ ohne Fixpunkt;

   (b) ein vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Funktion $f : X \to X$ mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, jedoch ohne Fixpunkt.

4. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

   in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}u$ und $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

5. Entscheiden Sie, ob die Gleichung $y^2(1 - x) = x^3$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nach der Variablen x auflösbar ist.

6. (Geometrische Reihe von Matrizen). Es bezeichne $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Matrixnorm (siehe Definition 10.62).

(a) Zeigen Sie, dass für $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Matrix $I_m - B$ invertierbar ist mit

$$(I_m - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j.$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j$ ist dabei als Grenzwert der Folge $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j\right)_n$ aufzufassen; ein Teil der Aussage ist also, dass diese Folge konvergiert (unter den getroffenen Annahmen).

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ offen ist und dass zu $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ jedes $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|C - B\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ ebenfalls invertierbar ist.