Serie 7

1. Verwenden Sie den Satz über lokale Invertierbarkeit (Satz 12.5), um den Satz über implizite Funktionen (Satz 12.2) zu beweisen.

2. (Umkehrabbildung zu Kugelkoordinaten) Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$f : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3 \smallsetminus ((-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R})$$
$$(r,\theta,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

wie in Abschnitt 12.1.4. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von f.

3. (Elliptische Kurven) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + a\}$. Für welche a ist M_a eine Teilmannigfaltigkeit?

4. (Quadratische Hyperflächen) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, so dass die assoziierte quadratische Form $Q_A : x \mapsto x^t A x$ nicht-degeneriert ist. Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_A(x) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ definiert.

5. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$ und $U \subset \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Des Weiteren sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine *Immersion*, also eine glatte Abbildung, deren Differential $\mathrm{D}_x f$ in jedem Punkt $x \in U$ injektiv ist.

   (a) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von x existiert, so dass $f(V)$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

   (b) Sei f nun zusätzlich injektiv. Ist dann auch ganz $f(U)$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

6. (a) Zeigen Sie die folgende Umkehrung von Satz 12.16: Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $0 < k < n$, so gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine glatte Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ regulärer Wert von F ist und $U \cap M = F^{-1}\{0\}$ gilt.

   (b) Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) und zwei glatte Funktionen $F_1, F_2\colon U \to \mathbb{R}$ sei $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert sowohl von F_1 als auch von F_2. Finden Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass der Schnitt $N = M_1 \cap M_2$ der beiden $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten (*Hyperflächen*) $M_1 = F_1^{-1}\{0\}$ und $M_2 = F_2^{-1}\{0\}$ eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.