D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS22
Prof. Urs Lang

Serie 8

1. Gegeben sei die Schar der Ellipsoide

$$4x^2 + 3y^2 + 8z^2 = c,\ c > 0.$$

Welches dieser Ellipsoide berührt die Ebene $2x + 3y + 4z = 12$ tangential, und in welchem Punkt?

2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf...

   (a) ...dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

   (b) ...der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

3. Bestimmen Sie die Extrema von $f\colon (x, y, z) \mapsto 3x - y + 2z$ auf der Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

4. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass sich Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent auch mittels abgeschlossener Quader definieren lassen; also dass eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_l)_l$ abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \varepsilon.$$

   (b) Folgern Sie, dass die Cantormenge $C \subset \mathbb{R}$ (vgl. Definition 2.82 im Skript) eine Nullmenge ist.

5. Konstruieren Sie eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, für welche der Rand ∂U keine Nullmenge ist.

6. (Challenge) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie: Ist K keine Nullmenge, so enthält die Differenzmenge $K - K = \{k_1 - k_2 \mid k_1, k_2 \in K\}$ eine Umgebung des Ursprungs $0 \in \mathbb{R}^n$.