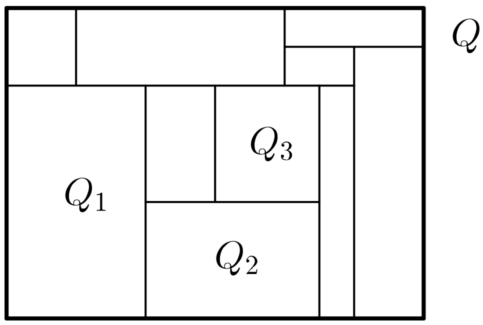
Serie 9

1. Sei Q ein abgeschlossener Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f \geqslant 0$ und $\int_Q f \mathrm{dvol} = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ fast überall gilt.

   Formulieren und beweisen Sie die analoge Aussage für Funktionen auf Jordanmessbaren Teilmengen.

2. (Ganzzahlige Kantenlängen) Gegeben sei ein Rechteck $Q \subset \mathbb{R}^2$, das eine endliche Überdeckung mit Rechtecken $Q_1, \ldots, Q_n \subset Q$ besitzt, die sich jeweils höchstens an den Kanten schneiden.



   Angenommen jedes der Rechtecke $Q_1, \ldots, Q_n$ hat mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge. Zeigen Sie, dass dann auch Q mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge hat.

   Hinweis: Finden Sie eine geeignete Funktion auf Q, dessen Integral genau dann verschwindet, wenn Q eine ganzzahlige Kante hat.

3. (Fubini) Berechnen Sie

$$\int_{B_1} xyz \,\mathrm{dvol} \quad \text{für } B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1\},$$

$$\int_{B_2} xyz \,\mathrm{dvol} \quad \text{für } B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}.$$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\omega_n = \mathrm{vol}(B_1^{\mathbb{R}^n}(0))$ das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes. Zeigen Sie, dass

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

   Hinweis: Finden Sie eine 2-Schritt-Rekursionsformel für ω_n.

5. (Volumen des Standardsimplex) Sei $n \in \mathbb{N}$. In dieser Übung möchten wir das Volumen des n-dimensionalen Simplex

$$\triangle_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \text{ und } \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1\}$$

berechnen.

   (a) Zeigen Sie, dass $\triangle_n$ das gleiche Volumen hat wie die Teilmenge

   $$A_e = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant 1\}.$$

   (b) Zu $\sigma \in S_n$ definieren wir

   $$A_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant y_{\sigma(1)} \leqslant y_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant y_{\sigma(n)} \leqslant 1\}.$$

   Verifizieren Sie, dass $\mathrm{vol}(A_\sigma) = \mathrm{vol}(A_e)$ gilt für alle $\sigma \in S_n$.

   (c) Begründen Sie, wieso $[0,1]^n = \bigcup_{\sigma \in S_n} A_\sigma$ ist und verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass das Volumen von $\triangle_n$ gleich $\frac{1}{n!}$ ist.

6. Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das Volumen des von den Flächen $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ und $4z = x^2 + y^2 + 4$ eingeschlossenen Bereichs B.