

Formelsammlung Analysis I

Definitionen und Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \exp(z) &= 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots & \sinh(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \\ \sin(z) &= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots & \cosh(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \\ \cos(z) &= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) & \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w) \\ \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) & \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \end{aligned}$$

Wichtige unbestimmte Integrale:

$$\begin{aligned} \int x^s dx &= \begin{cases} \frac{1}{s+1}x^{s+1} + C & \text{falls } s \neq -1 \\ \log|x| + C & \text{falls } s = -1 \end{cases} & \int \cosh(x) dx &= \sinh(x) + C \\ \int \exp(x) dx &= \exp(x) + C & \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \int \cos(x) dx &= \sin(x) + C & \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + C & \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \int \sinh(x) dx &= \cosh(x) + C & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C. \end{aligned}$$

Partielle Integration: Für zwei stetig differenzierbare Funktionen u und v gilt

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx + C.$$

Substitution: Seien $I_u, I_x \subseteq \mathbb{R}$. Seien weiter $g : I_u \rightarrow \mathbb{C}$ und $f : I_x \rightarrow I_u$ stetig differenzierbar. Dann gilt mit $u = f(x)$

$$\int (g \circ f)(x) f'(x) dx = \int g(u) du.$$

Trigonometrische und hyperbolische Substitution: Sei $n \in \mathbb{Z}$.

- Bei $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx$ für $a > 0$: Substitution $x = a \sin(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wobei $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a \cos(\theta)$.
- Bei $\int (a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}} dx$ für $a > 0$: Substitution $x = a \tan(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wobei $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\cos(\theta)}$.
- Bei $\int (x^2 - a^2)^{\frac{n}{2}} dx$ für $a \in \mathbb{R}$, falls $n \geq -1$: Substitution $x = a \cosh(u)$, wobei $(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = a \sinh(u)$.

Halbwinkelmethode: Bei rationalen Funktionen in den Ausdrücken $\sin(x)$ und $\cos(x)$ substituiert man $u = \tan(\frac{x}{2})$ mit $\frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}$, $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus: Für $x \in (-1, 1]$ gilt:

$$\log(1+x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$$

Leibniz-Kriterium: Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ und es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \right| \leq a_{\ell+1}.$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$.

D'Alemberts Quotientenkriterium: Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass der Grenzwert $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert. Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent.}$$

$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent und } (a_n)_n \text{ konvergiert nicht gegen Null.}$$

Wurzelkriterium: Obige Implikationen gelten auch für $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Verdichtungskriterium für Reihen: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen, monoton abnehmenden Gliedern $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent ist.

Cauchy-Produkt: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit komplexen Gliedern sind, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right),$$

wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right)$ absolut konvergent ist.

Erweiterter Mittelwertsatz: Seien f und g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass f und g auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Falls zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Taylor-Approximation: Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt für alle $x \in (a, b)$

$$f(x) = P_{f,x_0}^{(n)}(x) + R_{f,x_0}^{(n)}(x)$$

mit

$$P_{f,x_0}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{und} \quad R_{f,x_0}^{(n)}(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

wobei $P_{f,x_0}^{(n)}(x)$ die n -te Taylor-Approximation ist und $R_{f,x_0}^{(n)}$ das sogenannte Integral-Restglied ist.

Konvexität: Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heisst konvex, falls

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (1)$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und für alle $t \in [0, 1]$. Wir sagen, dass f streng konvex ist, falls in (1) eine strikte Ungleichung gilt, wenn immer $x_1 \neq x_2$ und $t \in (0, 1)$. Eine Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst (streng) konkav, wenn $f = -g$ (streng) konvex ist. Falls f zweimal differenzierbar ist und $f'' \geq 0$ auf ganz I erfüllt, dann ist f konvex.

Jensen-Ungleichung: Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Dann gilt $f(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.

Landau Notation: Für Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ schreiben wir $f = O(g)$ falls es ein $C > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq Cg(x)$ für alle $x \in X$. Für einen Häufungspunkt x_0 von $X \subseteq \mathbb{R}$ schreiben wir $f = O(g)$ für $x \rightarrow x_0$ falls es ein $C > 0$ und eine Umgebung U von x_0 gibt mit $|f(x)| \leq Cg(x)$ für alle $x \in X \cap U$. Wir schreiben $f = o(g)$ für $x \rightarrow x_0$ falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 gibt mit $|f(x)| \leq \varepsilon g(x)$ für alle $x \in X \cap U$.

Polynominterpolation: Für paarweise verschiedene $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und beliebige Werte $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ ist

$$f(z) = \sum_{k=1}^n w_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z - z_j)$$

ein Polynom mit $f(z_j) = w_j$ für $j = 1, \dots, n$.

Formelsammlung Analysis II

Mehrdimensionale Taylor-Approximation: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $(d+1)$ -mal stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$f(x+h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: \|\alpha\|_1 \leq d} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_{x,d}^f(h)$$

mit $R_{x,d}^f(h) = (d+1) \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: \|\alpha\|_1 = d+1} h^\alpha \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+th) dt = O(\|h\|^{d+1})$ für $h \rightarrow 0$. Hierbei ist $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ für alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$.

Im Falle $d=2$ gilt insbesondere $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} h^t H_f(x) h + O(\|h\|^3)$ für $h \rightarrow 0$, wobei $H_f(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ die Hesse-Matrix von f bei x bezeichnet.

Charakterisierungen von Kompaktheit: Sei X ein metrischer Raum. Dann sind folgende acht Eigenschaften äquivalent.

- (1) Jede unendliche Teilmenge von X besitzt einen Häufungspunkt.
- (2) X ist folgenkompakt.
- (3) Jede stetige, komplexwertige Funktion auf X ist beschränkt.
- (4) Jede stetige, reellwertige Funktion nimmt ein Maximum und ein Minimum an.
- (5) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.
- (6) X ist überdeckungskompakt.
- (7) X erfüllt das Schachtelungsprinzip.
- (8) X ist total beschränkt und vollständig.

Picard-Lindelöf: Es sei $d \geq 1$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig. Angenommen für alle $(t_0, x_0) \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(t_0, x_0) \subset U$ und $M > 0$, so dass für alle $(t, x_1), (t, x_2) \in B_\varepsilon(t_0, x_0)$ die Abschätzung

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$$

gilt. Seien weiters $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $(t_0, x_0) \in U$ gegeben.

Existenz: Dann existiert ein Zeitintervall $I = I_{\max} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit

- $(t, x(t)) \in U$ für alle $t \in I$,
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ und

- $x(t_0) = x_0$.

Eindeutigkeit: Für jede weitere Lösung $y : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ desselben Anfangswertproblems definiert auf einem offenen Intervall J mit $t_0 \in J$ gilt $J \subset I$ und $x|_J = y$.

Maximalität: Die Grenzwerte $\lim_{t \searrow a} (t, x(t))$ und $\lim_{t \nearrow b} (t, x(t))$ existieren in U nicht.

Satz zur impliziten Funktion: Sei $r > 0$ ein Radius und seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ Punkte. Angenommen die stetige Funktion $F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

- $F(x_0, y_0) = 0$.
- Die partiellen Ableitungen $\partial_{y_k} F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ existieren für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ und sind auf $B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0)$ stetig.
- Die totale Ableitung $\partial_y F(x_0, y_0)$ bei y_0 der Abbildung $y \in B_r(y_0) \mapsto F(x_0, y)$ ist invertierbar, das heisst, die Matrix $\partial_y F(x_0, y_0) = (\partial_{y_k} F_j(x_0, y_0))_{j,k} \in \text{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ hat nicht-verschwindende Determinante.

Dann existiert ein offener Ball $U_0 = B_\alpha(x_0)$ um x_0 und ein offener Ball $V_0 = B_\beta(y_0)$ um y_0 mit $\alpha, \beta \in (0, r)$ und eine stetige Funktion $f : U_0 \rightarrow V_0$, so dass für alle $(x, y) \in U_0 \times V_0$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = f(x)$ gilt. Insbesondere ist $f(x_0) = y_0$.

Falls F d -mal stetig differenzierbar ist für $d \geq 1$, dann ist die stetige Lösungsfunktion f ebenso d -mal stetig differenzierbar und die Ableitung von f bei $x \in U_0$ ist gegeben durch

$$D_x f = -((\partial_y F)(x, f(x)))^{-1}(\partial_x F)(x, f(x)),$$

wobei $\partial_x F(x, y) = (\partial_{x_k} F_j(x, y))_{j,k}$.

Satz zur inversen Abbildung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine d -mal stetig differenzierbare Funktion mit $d \geq 1$. Sei $x_0 \in U$ mit invertierbarer totaler Ableitung $D_{x_0} f \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ und eine offene Umgebung $V_0 \subset f(U)$ von $y_0 = f(x_0)$, so dass $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenso d -mal stetig differenzierbar ist. Des Weiteren gilt

$$D_y (f^{-1}) = (D_x f)^{-1}$$

für alle $x \in U_0$ und $y = f(x) \in V_0$.

Satz über den konstanten Rang: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq m < n$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion, so dass $D_p F$ Rang m hat für alle Punkte p in

$$M = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$$

(das heisst, 0 ist ein regulärer Wert von F). Dann ist M eine $(n - m)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

Lokale Beschreibung des Tangentialbündels: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit der Form $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ für eine glatte Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass 0 ein regulärer Wert von F ist. Dann ist

$$TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid D_p F(v) = 0\}.$$

Mehrdimensionale Substitutionsregel: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Jordanmessbare offene Teilmengen und sei $\Phi : X \rightarrow Y$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Des Weiteren sei $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist $x \in X \mapsto (f \circ \Phi(x)) |\det(D_x \Phi)|$ (zumindest uneigentlich) Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Y f(y) \, d\text{vol}(y) = \int_X (f \circ \Phi(x)) |\det(D_x \Phi)| \, d\text{vol}(x),$$

wobei die Funktion $x \in X \mapsto \det(D_x \Phi)$ als die Jacobi-Determinante von Φ bezeichnet wird.

Weg- und Flussintegral: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, deren Rand eine positiv orientierte Parametrisierung $\gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \rightarrow \partial B, \dots, \gamma_K : I_K = [a_K, b_K] \rightarrow \partial B$ besitzt. Weiter sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supset B$. Dann ist das Wegintegral von f definiert als

$$\int_{\partial B} f \cdot ds = \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), \dot{\gamma}_k(t) \rangle dt.$$

Sei $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SO}(2, \mathbb{R})$. Das Flussintegral von f durch den Rand ∂B ist

$$\int_{\partial B} f \cdot d\mathbf{n} = \int_{\partial B} (Rf) \cdot ds = \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), R^{-1} \dot{\gamma}_k(t) \rangle dt.$$

Flussintegral durch Flächen: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche, sei $\Phi_1 : V_1 \rightarrow U_1, \dots, \Phi_L : V_L \rightarrow U_L$ eine orientierte Parametrisierung von S und sei $K_1 \subset V_1 \cap \mathbb{R}^2, \dots, K_L \subset V_L \cap \mathbb{R}^2$ eine Kartenpartition für diese Parametrisierung. Sei $U \supset S$ eine offene Menge und sei f ein stetiges Vektorfeld auf U . Dann definieren wir das Flussintegral von f über S durch

$$\int_S f \cdot d\mathbf{n} = \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \langle f \circ \Phi_\ell, \partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell \rangle ds dt.$$

Viel Erfolg!