Probeprüfung

Rechnungen

1. Für welchen Wert $c > 0$ berührt das Ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = c$ die Ebene $2x + 2y + 3z = 9$ tangential, und in welchem Punkt?

2. Berechnen Sie den von der Kurve $\gamma\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(2t))$, eingeschlossenen Flächeninhalt.

3. Wird die Strecke von $(2, 0, -1)$ nach $(1, 0, 1)$ um die z-Achse rotiert, so entsteht eine Rotationsfläche S. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $(x, y, z) \mapsto (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, -z)$ durch S von innen nach aussen.

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 6$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Theorie

5. Es seien X, Y zwei metrische Räume, und X sei kompakt. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion.

   (a) Zeigen Sie, dass $f(X)$ kompakt ist.

   (b) Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig ist.

6. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

   (a) Zeigen Sie: Gibt es zu f ein Potential $F\colon U \to \mathbb{R}$, so ist f konservativ.

   (b) Zeigen Sie: Ist f stetig differenzierbar und besitzt f ein Potential, so erfüllt $f = (f_1, \ldots, f_n)$ die Integrabilitätsbedingungen $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

   (c) Geben Sie ein Beispiel eines Gebiets $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eines konservativen glatten Vektorfelds $f = (f_1, f_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$, welches die Integrabilitätsbedingung $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ erfüllt aber kein Potential besitzt (diese Eigenschaften sind nachzuweisen).

Multiple Choice

7. Welche der folgenden Aussagen über vollständige metrische Räume sind stets wahr?

   (a) Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.

   (b) Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.

   (c) Jeder vollständige und beschränkte metrische Raum ist kompakt.

   (d) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig und beschränkt.

8. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

   (a) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, so ist f in x_0 stetig.

   (b) Existieren alle Richtungsableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, so ist f in x_0 differenzierbar.

   (c) Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf ganz U und sind diese stetig, so ist f auf U differenzierbar.

   (d) Ist f auf ganz U differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen von f auf U und diese sind stetig.

9. Welche der folgenden Aussagen über Untermannigfaltigkeiten sind stets wahr?

   (a) Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $N \subset M$ offen in M, so ist N selbst eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

   (b) Die Vereinigung von zwei disjunkten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

   (c) Das kartesische Produkt einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und einer l-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.

   (d) Sind M, N zwei $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ für $n \geqslant 2$, und gilt $T_pM \neq T_pN$ für alle $p \in M \cap N$, so ist $M \cap N$ eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

10. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ sind stets wahr?

    (a) Jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\sup_{t>0} \|x(t)\|_2 = \infty$ wächst für $t \to \infty$ exponentiell.

(b) Es gibt genau dann eine nicht-triviale konstante Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, wenn $\det(A) = 0$ ist.

(c) Ist A reell diagonalisierbar und existiert eine nicht-triviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.

(d) Ist A komplex diagonalisierbar und existiert eine nicht-triviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.

Beweise und Anwendungen der Theorie

11. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine positive stetige Funktion, $a < b$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant (b-a)^2.$$

12. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $B \subset U$ ein glatt berandeter, kompakter und zusammenhängender Bereich mit äusserem Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}\colon \partial B \to \mathbb{R}^n$, und sei $u\colon U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit *Aussennormalableitung* $\partial_{\mathbf{n}} u = \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle\colon \partial B \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_B \|\nabla u\|_2^2 \,d\mathrm{vol} = \int_{\partial B} (u\,\partial_{\mathbf{n}} u)\,ds$$

gilt und folgern Sie daraus, dass u auf B konstant sein muss, falls $u|_{\partial B} = 0$ oder $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$.