Musterlösung Serie 19

ALGEBRAISCHER ABSCHLUSS & NORMALE KÖRPERERWEITERUNGEN

104. Sei $L : K$ eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\tilde{K}$ aller über K algebraischen Elemente von L heisst *der (relative) algebraische Abschluss von K in L*. Zeige:

(a) $\tilde{K}$ ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von $L : K$, der algebraisch über K ist.

(b) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K im Sinne der Vorlesung.

(c) Gilt die Folgerung in (b) auch im Fall $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ (d.h. für $L = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Q}$)?

(d) Seien $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, und $\overline{\mathbb{Q}}^+$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Zeige $[\overline{\mathbb{Q}} : \overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

Lösung: (a) Gemäss Vorlesung liegen Summe, Differenz, Produkt und (sofern definiert) Quotient zweier Elemente aus $\tilde{K}$ in $\tilde{K}$, also ist $\tilde{K}$ ein Zwischenkörper der Erweiterung $L : K$. Die Körpererweiterung $\tilde{K} : K$ ist nach Konstruktion algebraisch, denn jedes Element aus $\tilde{K}$ ist algebraisch über K. Weiters ist jedes Element aus $L \backslash \tilde{K}$ transzendent über K, weshalb jeder echte Oberkörper von $\tilde{K}$ in L transzendente Elemente enthält. Somit ist $\tilde{K}$ der eindeutige grösste über K algebraische Zwischenkörper von $L : K$.

(b) Sei $f \in K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Da L algebraisch abgeschlossen ist, hat f eine Nullstelle a in L. Als Nullstelle von f ist a algebraisch über K und liegt deshalb in $\tilde{K}$. Somit hat jedes nichtkonstante Polynom in $K[X]$ eine Nullstelle in $\tilde{K}$. Weiters ist die Körpererweiterung $\tilde{K} : K$ gemäss (a) algebraisch. Also ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

(c) Das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, also ist $\tilde{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen und somit kein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.

(d) Nach Konstruktion ist

$$\overline{\mathbb{Q}}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}.$$

Wegen (c) gilt $i \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}^+$, insbesondere ist $\overline{\mathbb{Q}}^+ \neq \overline{\mathbb{Q}}$. Betrachte nun ein beliebiges $z \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}^+$. Dann ist das konjugiert komplexe $\bar{z}$ eine weitere Nullstelle des Minimalpolynoms von z über $\mathbb{Q}$ und liegt daher ebenfalls in $\overline{\mathbb{Q}}$. Somit liegen auch $r_1 := \mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ und $r_2 := \mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$ in $\overline{\mathbb{Q}}$. Da nun r_1 und r_2 reell und algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind, liegen r_1 und r_2 somit in $\overline{\mathbb{Q}}^+$. Wegen $z = r_1 + i \cdot r_2$, ist die Menge $\{1, i\}$ also eine $\overline{\mathbb{Q}}^+$-Basis von $\overline{\mathbb{Q}}$. Somit ist $[\overline{\mathbb{Q}} : \overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

105. Sei p ein Primzahl, sei $L := \mathbb{F}_p(t)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_p$ in der Variablen t (d.h. der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[t]$), und sei $K := \mathbb{F}_p(t^p)$.

Zeige: Das Polynom $X^p - t^p$ ist irreduzibel und inseparabel über K, und L ist sein Zerfällungskörper.

Lösung: Der Ring $\mathbb{F}_p[t^p]$ ist isomorph zum Polynomring $\mathbb{F}_p[Y]$ via eines Isomorphismus, der auf $\mathbb{F}_p$ die Identität ist und Y auf t^p abbildet. Da Y ein irreduzibles Element im Hauptidealring $\mathbb{F}_p[Y]$ ist, ist auch $t^p \in \mathbb{F}_p[t^p]$ irreduzibel. Nach dem Schönemann-Eisenstein-Kriterium ist nun $X^p - t^p$ ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{F}_p[t^p][X]$, also ist es nach dem Lemma von Gauss irreduzibel in $\mathbb{F}_p(t^p)[X] = K[X]$. über L gilt $X^p - t^p = (X - t)^p$, also hat das Polynom die p-fache Nullstelle t und ist somit, da es irreduzibel ist, nicht separabel. Da $L = K(t)$ ist, ist L der Zerfällungskörper.

106. Finde ein Beispiel einer algebraischen Körpererweiterung $L : K$ mit den folgenden Eigenschaften.

(a) $L : K$ ist endlich, nicht separabel und K hat positive Charakteristik.

(b) $L : K$ ist nicht endlich, aber normal.

(c) $L : K$ ist nicht endlich und nicht normal.

Lösung: (a) Nach Aufgabe 105 hat z.B. die Erweiterung $\mathbb{F}_p(t) : \mathbb{F}_p(t^p)$ für jede Primzahl p die gewünschten Eigenschaften.

(b) Zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$ und $L = \overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$. Diese Erweiterung hat unendlichen Grad, da z.B. für jede positive natürliche Zahl n der Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = n$ ist.

(c) Zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$ und $L = \overline{\mathbb{Q}}^+$ aus Aufgabe 97. Dann hat das irreduzible Polynom $X^n - 2$ für jede positive natürliche Zahl $n \geqslant 3$ mindestens eine, aber höchstens zwei seiner n Nullstellen in L.

107. Entscheide jeweils, ob für die folgenden beiden $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ normal ist. Falls die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ nicht normal ist, so bestimme eine *normale Hülle* der Erweiterung, d.h. einen kleinsten Oberkörper von $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)}$, sodass $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)} : \mathbb{Q}$ normal ist.

(a) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(b) $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$

Lösung: (a) Druch doppeltes Quadrieren erhalten wir, dass α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2$ ist. Dieses ist nach Schönemann-Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und deshalb das Minimalpolynom von α. Die anderen drei Nullstellen von f sind $-\alpha$ und

$$\pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \pm\frac{\alpha^2 - 2}{\alpha}$$

und liegen ebenfalls in $\mathbb{Q}(\alpha)$. Also ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ der Zerfällungskörper von f und somit ist die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ normal.

(b) Doppeltes Quadrieren ergibt, dass α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2$ ist. Dieses ist nach Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und deshalb das Minimalpolynom von α. Die anderen drei Nullstellen von f sind $-\alpha$ und

$$\pm i\sqrt{\sqrt{3}-1} = \pm \frac{i\sqrt{2}}{\alpha} \notin \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}.$$

Der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$ ist somit $\mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{\sqrt{3}-1}) = \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$; beachte, dass $\sqrt{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-1} = \sqrt{2}$ und $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{\sqrt{3}-1}$. Da der Zerfällungskörper von f nicht in $\mathbb{Q}(\alpha)$ enthalten ist, ist somit $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ nicht normal. Seine normale Hülle in $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$.