Musterlösung Serie 21

Galoisgruppen und Repetitionsaufgaben

---

112. Sei L der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

Berechne $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$.

Lösung: Mit Satz 19.4 ist $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ isomorph zu einer Untergruppe von S_3, also $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q}) \leqslant S_3$. Seien a_1, a_2 Nullstellen von $X^3 - 2$. Nach Satz 14.4 existiert ein Homomorphismus $\mathbb{Q}(a_1) \to \mathbb{Q}(a_2)$, der a_1 auf a_2 abbildet, und dieser Homomorphismus kann zu einem Isomorphismus $L \to L$ erweitert werden. Somit können wir je zwei Nullstellen von $X^3 - 2$ durch Elemente der Galoisgruppe aufeinander abbilden. Ausserdem ist die komplexe Konjugation in $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$, das heisst $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ hat ein Element der Ordnung 2. Daraus folgt, dass $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q}) \cong S_3$ ist; zum Beispiel indem wir überprüfen, dass S_3 von einer Transposition und einem beliebigen anderen nichttrivialen Element erzeugt wird.

113. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein separables Polynom. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstelle von f in einem algebraischen Abschluss von K. Mit Satz 19.4 kann $\mathrm{Gal}(f)$ in die symmetrische Gruppe $S(a_1, \ldots, a_n)$ eingebettet werden. Das bedeutet, dass $\mathrm{Gal}(f)$ auf den Nullstellen von f operiert.

Zeige: Für jedes $i = 1, \ldots, n$ ist die Bahn von a_i dieser Operation genau die Menge der Nullstellen des irreduziblen Faktors von f, dessen Nullstelle a_i ist.

Lösung: Sei a_i eine Nullstelle von f und sei g der irreduzible Faktor von f, dessen Nullstelle a_i ist. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(f)$. Nach Korollar 19.3 ist $\sigma(a)$ ebenfalls eine Nullstelle von g, d.h. die Bahn von a_i ist in der Menge der Nullstellen von g enthalten. Sei andererseits a_j eine weitere Nullstelle von g und sei L der Zerfällungskörper von f. Nach Satz 14.4 existiert ein Körperhomomorphismus $K(a_i) \to K(a_j)$, der a_i auf a_j abbildet und auf K die Identität ist. Als Folgerung aus Satz 15.2 lässt sich dieser zu einem K-Automorphismus $L \to L$ (einem Element aus $\mathrm{Gal}(f)$) erweitern. Somit liegen a_i und a_j in derselben Bahn und wir sind fertig.

114. Sind die folgenden Körper isomorph?

(a) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 2)$;

(b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 2)$;

(c) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 2)$;

(d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.

Lösung: (a) Wir können beide Körper in $\mathbb{C}$ einbetten via $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$. Ein Isomorphismus $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 2) \to \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$

entspricht damit einem Isomorphismus $\sigma\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}i) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dieser ist auf dem Primkörper $\mathbb{Q}$ die Identität; also ist $-2 = \sigma(-2) = \sigma((\sqrt{2}i)^2) = \sigma(\sqrt{2}i)^2$ ein Quadrat im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$; Widerspruch. Somit sind die beiden Körper nicht isomorph.

(b) Wie in (a) bekommen wir $\sigma(\sqrt{2}i)^2 = -2$. Das ist in $\mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$ nicht möglich. Sei nämlich $(a+ib)^2 = -2$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann ist $a^2 - b^2 + 2abi = -2$, also $a^2 - b^2 = -2$ und $2ab = 0$. Die erste Gleichung impliziert $b \neq 0$, was mit der zweiten $a = 0$ impliziert. In die erste Gleichung eingesetzt folgt daraus $b^2 = 2$. Aber in $\mathbb{Q}$ gibt es keine Quadratwurzel aus 2, Widerspruch.

Aliter: Wir können via $\mathbb{Q}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2+2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$ beide Körper mit Unterkörpern von $\mathbb{C}$ identifizieren. Ihr Kompositum ist dann $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ und hat Grad 4 über $\mathbb{Q}$; insbesondere sind sie verschieden. Später wird gezeigt, dass diese beiden Körper genau dann isomorph über $\mathbb{Q}$ sind, wenn die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}(i))$ und $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}i))$ in $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q})$ konjugiert sind. Allerdings ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q})$ isomorph zur Klein'schen Vierergruppe, also kommutativ, und hat keine verschiedenen zueinander konjugierten Untergruppen.

(c) Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ induziert die Substitution $X \mapsto X/\sqrt{2}$ einen Isomorphismus.

(d) Ja, via der von $X \mapsto -X$ induzierten Abbildung.

Aliter: $\mathbb{Q}[X]/(X^3-2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(-\sqrt[3]{2}) \cong \mathbb{Q}[X]/(X^3+2)$.

115. (a) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über dem Körper K.
Zeige, dass dann gilt

$$\big[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K\big] \leqslant \prod_{i=1}^{n} \big[K(\alpha_i) : K\big].$$

(b) Zeige am Beispiel $\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}\big) : \mathbb{Q}$, dass die Ungleichung in (a) auch strikt sein kann.

(c) Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}\big) : \mathbb{Q}$ normal?

Lösung: (a) Sei $K_i = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach der Multiplikativität des Körpergrades gilt

$$[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K] = [K_n : K_{n-1}] \cdot [K_{n-1} : K_{n-2}] \ldots [K_1 : K].$$

Ausserdem gilt $[K_i : K_{i-1}] = [K_{i-1}(\alpha_i) : K_{i-1}] \leqslant [K(\alpha_i) : K]$ nach Aufgabe 82. Damit folgt die Aussage.

(b) Offensichtlich ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{9}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[2]{3})$. Also ist

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[2]{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] \leqslant 2 \cdot 4 = 8.$$

Andererseits ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$ und $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{18}) : \mathbb{Q}] = 4$ und somit

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{18}) : \mathbb{Q}] = 16.$$

(c) Nein, denn $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}) \subset \mathbb{R}$, aber das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{2}$ ist $X^4 - 2$ und hat auch nicht-reelle Nullstellen.

116. Sei $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, e^{\frac{\pi i}{4}})$.

Zeige, dass die Körpererweiterung $L : \mathbb{Q}$ normal ist und bestimme $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$.

Lösung: Wegen $e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, e^{\frac{\pi i}{4}}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$. Die Erweiterung $L : \mathbb{Q}$ ist also normal, da L der Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$ ist.

Mit Satz 19.9 gilt somit $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}] = 8 = |\,\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q})|$.

Die komplexe Konjugation $\sigma\colon \mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i)$ ist sicher ein Element von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q})$, also auch von $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$. Die Ordnung von σ ist 2.

Das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{2}$ über $\mathbb{Q}(i)$ ist $X^4 - 2$ und hat die vier Nullstellen $\pm\sqrt[4]{2}, \pm i\sqrt[4]{2}$. Für jede Nullstelle α von $X^4 - 2$ gibt es einen Isomorphismus $\mathbb{Q}(i)[X]/(X^4 - 2) \to \mathbb{Q}(i)(\alpha)$ über $\mathbb{Q}(i)$, der die Restklasse von X auf α abbildet. Daher gibt es für jedes α einen $\mathbb{Q}(i)$-Automorphismus τ_α von L, der $\sqrt[4]{2}$ auf α abbildet. Für $\alpha_0 = i\sqrt[4]{2}$ ist

$$\tau_{\alpha_0}(i\sqrt[4]{2}) = \tau_{\alpha_0}(i) \cdot \tau_{\alpha_0}(\sqrt[4]{2}) = i \cdot i\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{2}.$$

Weiter gilt $\tau_{\alpha_0}(-\sqrt[4]{2}) = -i\sqrt[4]{2}$ und $\tau_{\alpha_0}(-i\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$, d.h. die Nullstellen werden durch τ_{α_0} zyklisch vertauscht und $\mathrm{ord}(\tau_{\alpha_0}) = 4$.

Da $|\,\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})| = 8$, wird die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ von σ und τ_{α_0} erzeugt und es gilt $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q}) \cong D_4$.