Musterlösung Serie 23

HAUPTSATZ DER GALOISTHEORIE II

---

121. Sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^6 - 5$ über $\mathbb{Q}$.

Bestimme alle Zwischenkörper von $L : \mathbb{Q}$ mitsamt Inklusionen sowie, falls die Körpererweiterung galoissch über $\mathbb{Q}$ ist, deren Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$.

Lösung: Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, können wir L als in $\mathbb{C}$ eingebettet annehmen. Sei a die positive reelle sechste Wurzel aus 5. Sei ζ eine primitive dritte Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Für $1 \leqslant i \leqslant 6$ sei $a_i := a \cdot (-\zeta)^{i-1}$. Dann ist $a_i^6 - 5 = a^6 \cdot (-\zeta)^{6i-6} - 5 = 0$, also sind $a_1, \ldots, a_6$ gerade die sechs verschiedenen Nullstellen von $X^6 - 5$. Somit ist $L = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_6) \subset \mathbb{Q}(a, \zeta)$, und wegen $a_1 = a$ und $-\frac{a_2}{a_1} = -\frac{a \cdot (-\zeta)}{a} = \zeta$ ist sogar $L = \mathbb{Q}(a, \zeta)$.

Für $1 \leqslant i \leqslant 6$ ist $[\mathbb{Q}(a_i) : \mathbb{Q}] = 6$, da $X^6 - 5$ nach dem Eisenstein-Kriterium irreduzibel ist. Wegen $\zeta \notin \mathbb{Q}(a) \subset \mathbb{R}$ ist zudem $[L : \mathbb{Q}(a)] = 2$, und somit $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(a)] \cdot [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 12$. Insbesondere hat auch $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ Ordnung 12.

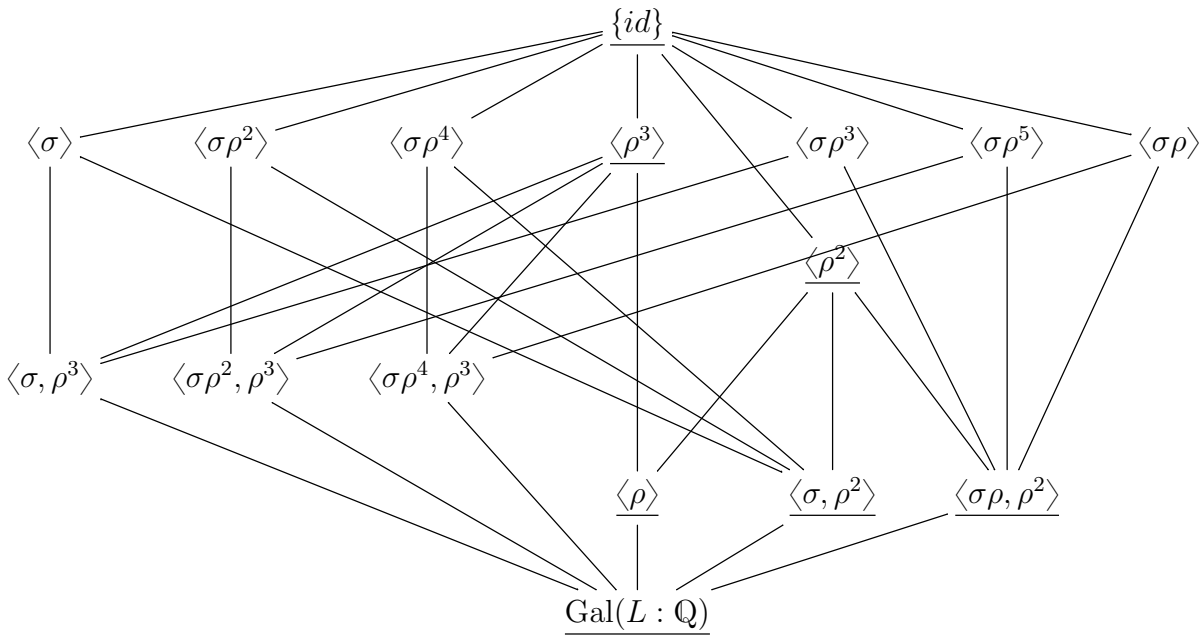
Wir fassen im Folgenden $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ durch die durch $a_i \mapsto i$ induzierte Einbettung als Untergruppe von S_6 auf.

Da $L : \mathbb{Q}$ normal ist, ist die Einschränkung σ der komplexen Konjugation auf L ein Element von $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$. Konkret entspricht σ der Permutation $(2\,6)(3\,5)$.

Da $X^6 - 5$ irreduzibel ist, operiert $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ transitiv auf dessen Nullstellen; es existiert also ein $\rho \in \mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ mit $\rho(a_1) = a_2$. Wegen $\sigma(a_1) = a_1$ gilt auch $(\rho\sigma)(a_1) = a_2$. Da σ die beiden Nullstellen ζ und ζ^2 des irreduziblen Polynoms $X^2 + X + 1$ vertauscht und ρ sie als $\mathbb{Q}$-Homomorphismus vertauscht oder fix lässt, können wir also (indem wir allenfalls ρ durch $\rho\sigma$ ersetzen) ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\rho(\zeta) = \zeta$ ist. Dann ist $\rho(a_i) = \rho\big(a \cdot (-\zeta)^{i-1}\big) = a \cdot (-\zeta)^i$, also hat ρ die Darstellung $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$.

Die Rechnung $\sigma\rho\sigma^{-1} = (2\,6)(3\,5)(1\,2\,3\,4\,5\,6)(2\,6)(3\,5) = (6\,5\,4\,3\,2\,1) = \rho^{-1}$ zeigt nun, wegen $|D_6| = 12 = |\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})|$, dass die von ρ und σ erzeugte Untergruppe tatsächlich isomorph zu D_6 ist.

Auf der nächsten Seite ist eine Aufstellung aller Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q}) \cong D_6$ (die detaillierte Überprüfung lassen wir hier weg); normale Untergruppen sind unterstrichen:



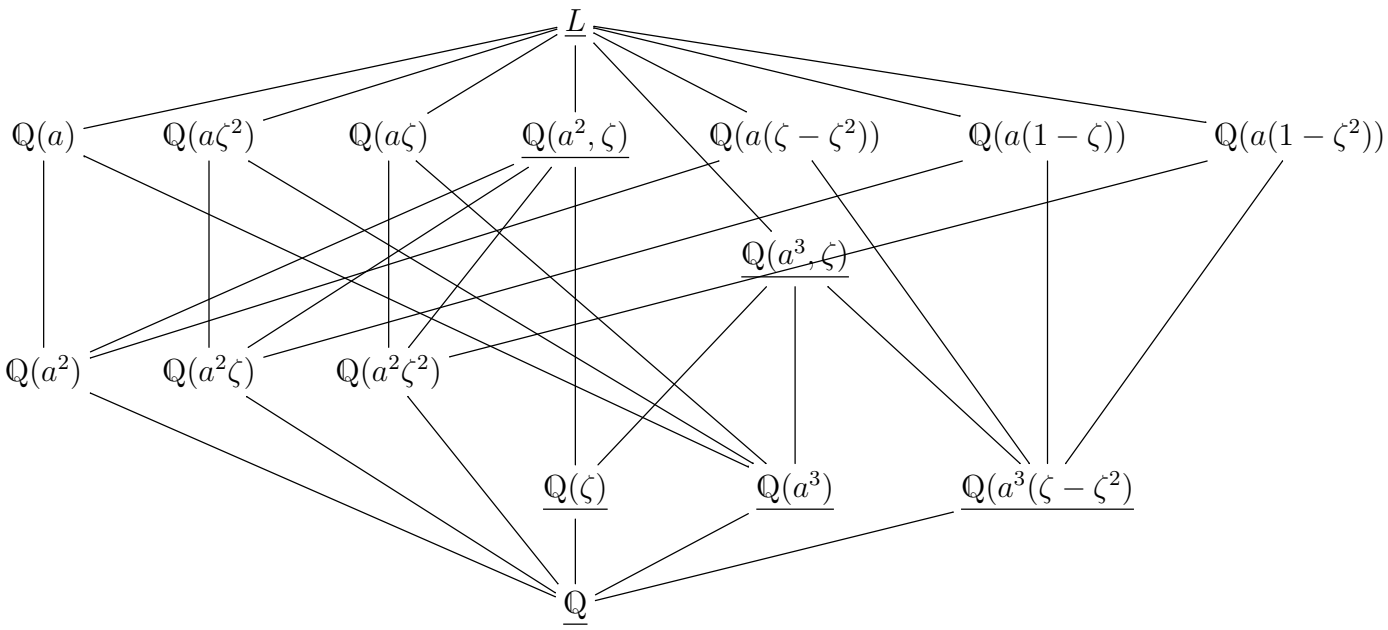
Daraus folgern wir nun die Aufstellung der Zwischenkörper; die Galois-Korrespondenz ordnet einer Untergruppe $H < \mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ den Fixkörper L^H mit dem Erweiterungsgrad $[L^H : \mathbb{Q}] = \frac{|\mathrm{Gal}(L:\mathbb{Q})|}{|H|} = \frac{12}{|H|}$ zu:

- $L^{\{\}} = L$.
- $L^{\mathrm{Gal}(L:\mathbb{Q})} = \mathbb{Q}$.
- Es ist $\sigma(a) = a$, also $\mathbb{Q}(a) \subset L^{\langle\sigma\rangle}$. Zudem ist $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 6 = \frac{12}{|\langle\sigma\rangle|}$, also $L^{\langle\sigma\rangle} = \mathbb{Q}(a)$.
- Analog ist $(\sigma\rho^2)(a\zeta^2) = a\zeta^2$, also $\mathbb{Q}(a\zeta^2) \subset L^{\langle\sigma\rho^2\rangle}$. Zudem ist $[\mathbb{Q}(a\zeta^2) : \mathbb{Q}] = 6 = \frac{12}{|\langle\sigma\rho^2\rangle|}$, also $L^{\langle\sigma\rho^2\rangle} = \mathbb{Q}(a\zeta^2)$.
- Analog ist $(\sigma\rho^4)(a\zeta) = a\zeta$, also $\mathbb{Q}(a\zeta) \subset L^{\langle\sigma\rho^4\rangle}$. Zudem ist $[\mathbb{Q}(a\zeta) : \mathbb{Q}] = 6 = \frac{12}{|\langle\sigma\rho^4\rangle|}$, also $L^{\langle\sigma\rho^4\rangle} = \mathbb{Q}(a\zeta)$.
- Es ist $\sigma(a^2) = \rho^3(a^2) = a^2$, also $\mathbb{Q}(a^2) \subset L^{\langle\sigma,\rho^3\rangle}$. Zudem ist a^2 eine Nullstelle des über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynoms $X^3 - 5$, also $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}] = 3 = \frac{12}{|\langle\sigma,\rho^3\rangle|}$ und somit $L^{\langle\sigma,\rho^3\rangle} = \mathbb{Q}(a^2)$.
- Analog ist $(\sigma\rho^2)(a^2\zeta) = \rho^3(a^2\zeta) = a^2\zeta$, also $\mathbb{Q}(a^2\zeta) \subset L^{\langle\sigma\rho^2,\rho^3\rangle}$. Zudem ist $a^2\zeta$ eine Nullstelle des über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynoms $X^3 - 5$, also $[\mathbb{Q}(a^2\zeta) : \mathbb{Q}] = 3 = \frac{12}{|\langle\sigma\rho^2,\rho^3\rangle|}$ und somit $L^{\langle\sigma\rho^2,\rho^3\rangle} = \mathbb{Q}(a^2\zeta)$.
- Analog ist $(\sigma\rho^4)(a^2\zeta^2) = \rho^3(a^2\zeta^2) = a^2\zeta^2$, also $\mathbb{Q}(a^2\zeta^2) \subset L^{\langle\sigma\rho^4,\rho^3\rangle}$. Zudem ist $a^2\zeta^2$ eine Nullstelle des über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynoms $X^3 - 5$, also $[\mathbb{Q}(a^2\zeta^2) : \mathbb{Q}] = 3 = \frac{12}{|\langle\sigma\rho^4,\rho^3\rangle|}$ und somit $L^{\langle\sigma\rho^4,\rho^3\rangle} = \mathbb{Q}(a^2\zeta^2)$.
- Es ist $\rho(\zeta) = \zeta$, also $\mathbb{Q}(\zeta) \subset L^{\langle\rho\rangle}$. Zudem ist $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 2 = \frac{12}{|\langle\rho\rangle|}$, also $\mathbb{Q}(\zeta) = L^{\langle\rho\rangle}$.

- Es ist $\sigma(a^3) = \rho^2(a^3) = a^3$, also $\mathbb{Q}(a^3) \subset L^{\langle\sigma,\rho^2\rangle}$. Zudem ist a^3 eine Nullstelle des über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynoms $X^2 - 5$, also ist $[\mathbb{Q}(a^3) : \mathbb{Q}] = 2 = \frac{12}{|\langle\sigma,\rho^2\rangle|}$ und somit $\mathbb{Q}(a^3) = L^{\langle\sigma,\rho^2\rangle}$.
- Es ist $\rho^2(a^3) = a^3$ und $\rho^2(\zeta) = \zeta$, also $\mathbb{Q}(a^3, \zeta) \subset L^{\langle\rho^2\rangle}$. Wegen $\zeta \notin \mathbb{Q}(a^3) \subset \mathbb{R}$ ist $[\mathbb{Q}(a^3, \zeta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a^3, \zeta) : \mathbb{Q}(a^3)][\mathbb{Q}(a^3) : \mathbb{Q}] = 4$, also $[\mathbb{Q}(a^3, \zeta) : \mathbb{Q}] = \frac{12}{|\langle\rho^2\rangle|}$ und somit $L^{\langle\rho^2\rangle} = \mathbb{Q}(a^3, \zeta)$.
- Analog ist $\rho^3(a^2) = a^2$ und $\rho^3(\zeta) = \zeta$, also $\mathbb{Q}(a^2, \zeta) \subset L^{\langle\rho^3\rangle}$. Wegen $\zeta \notin \mathbb{Q}(a^2) \subset \mathbb{R}$ ist $[\mathbb{Q}(a^2, \zeta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a^2, \zeta) : \mathbb{Q}(a^2)][\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}] = 6$, also $[\mathbb{Q}(a^2, \zeta) : \mathbb{Q}] = \frac{12}{|\langle\rho^3\rangle|}$ und somit $L^{\langle\rho^3\rangle} = \mathbb{Q}(a^2, \zeta)$.
- Es gilt $(\sigma\rho^3)(a\zeta) = -a\zeta^2$ und somit $(\sigma\rho^3)(a(\zeta-\zeta^2)) = a(\zeta-\zeta^2)$ wegen $(\sigma\rho^3)^2 = id_L$; also ist $\mathbb{Q}(a(\zeta - \zeta^2)) \subset L^{\langle\sigma\rho^3\rangle}$. Zudem ist $a(\zeta - \zeta^2)$ eine Nullstelle des Polynoms X^6+135, und dieses ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ nach dem Eisensteinkriterium bezüglich der Primzahl 5. Also ist $[\mathbb{Q}(a(\zeta-\zeta^2)) : \mathbb{Q}] = 6 = \frac{12}{|\langle\sigma\rho^3\rangle|}$ und somit $L^{\langle\sigma\rho^3\rangle} = \mathbb{Q}(a(\zeta-\zeta^2))$.
- Analog gilt $(\sigma\rho^5)(a) = -a\zeta$ und somit $(\sigma\rho^5)(a(1-\zeta)) = a(1-\zeta)$ wegen $(\sigma\rho^5)^2 = id_L$; also ist $\mathbb{Q}(a(1-\zeta)) \subset L^{\langle\sigma\rho^5\rangle}$. Zudem ist $a(1-\zeta)$ eine Nullstelle des Polynoms $X^6 + 135$. Also ist $[\mathbb{Q}(a(1-\zeta)) : \mathbb{Q}] = 6 = \frac{12}{|\langle\sigma\rho^5\rangle|}$ und somit $L^{\langle\sigma\rho^5\rangle} = \mathbb{Q}(a(1-\zeta))$.
- Analog gilt $(\sigma\rho)(a) = -a\zeta^2$ und somit $(\sigma\rho)(a(1-\zeta^2)) = a(1-\zeta^2)$ wegen $(\sigma\rho)^2 = id_L$; also ist $\mathbb{Q}(a(1-\zeta^2)) \subset L^{\langle\sigma\rho\rangle}$. Zudem ist $a(1-\zeta^2)$ eine Nullstelle des Polynoms $X^6 + 135$. Also ist $[\mathbb{Q}(a(1-\zeta^2)) : \mathbb{Q}] = 6 = \frac{12}{|\langle\sigma\rho\rangle|}$ und somit $L^{\langle\sigma\rho\rangle} = \mathbb{Q}(a(1-\zeta^2))$.
- Es ist $L^{\langle\sigma\rho,\rho^2\rangle} = L^{\langle\sigma\rho\rangle} \cap L^{\langle\rho^2\rangle} = \mathbb{Q}(a^3, \zeta) \cap \mathbb{Q}(a(1-\zeta^2)) \ni (a(1-\zeta^2))^3 = 3a^3(\zeta-\zeta^2)$. Wegen $[L^{\langle\sigma\rho,\rho^2\rangle} : \mathbb{Q}] = \frac{12}{|\langle\sigma\rho,\rho^2\rangle|} = 2$ und $a^3(\zeta - \zeta^2) \notin \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt also $L^{\langle\sigma\rho,\rho^2\rangle} = \mathbb{Q}(a^3(\zeta - \zeta^2))$.

Bemerkung: An einigen Stellen hätte man auch ausnutzen können, dass mehrere der Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ zu einander konjugiert sind. Sind nämlich zwei Untergruppen H, H' unter φ konjugiert, so ist $L^{H'} = \varphi(L^H)$.

Insgesamt ergibt sich die folgende Aufstellung:



Dabei ist ein Zwischenk"orper unterstrichen, wenn die entsprechende Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ normal ist. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie ist das genau dann der Fall, wenn der Zwischenk"orper galoissch über $\mathbb{Q}$ ist, und dann gilt weiter $\mathrm{Gal}(L^H : \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})/H$. Daraus ergeben sich die folgenden Galoisgruppen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a^2, \zeta) : \mathbb{Q}) &\cong D_3, \\
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a^3, \zeta) : \mathbb{Q}) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \\
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a^3) : \mathbb{Q}) &\cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a^3(\zeta - \zeta^2)) : \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$