Serie 14

KÖRPERERWEITERUNGSGRADE, MINIMALPOLYNOME

---

83. Sei $L : K$ eine algebraische Körpererweiterung. Seien K_1, K_2 zwei Zwischenkörper, d.h. $K \subseteq K_1, K_2 \subseteq L$, sodass die Körpererweiterungen $K_1 : K$ und $K_2 : K$ endlich sind. Das *Kompositum* von K_1 und K_2 ist definiert als $K_1K_2 := K(K_1 \cup K_2)$. Zeige:

(a) $[K_1K_2 : K_2] \leqslant [K_1 : K]$

(b) $[K_1K_2 : K] \leqslant [K_1 : K] \cdot [K_2 : K]$

(c) Falls $\operatorname{ggT}([K_1 : K], [K_2 : K]) = 1$ ist, so gilt Gleichheit in (b).

Bemerkung: Falls in (b) Gleichheit gilt, so heissen K_1 und K_2 *linear disjunkt* über K.

84. (a) Sei ω eine primitive 3. Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$.
Zeige: $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2$.

(b) Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$.

(c) Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

85. Bestimme das Minimalpolynom folgender (komplexer) Zahlen über $\mathbb{Q}$.

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

(b) $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5}i$

86. (a) Zeige, dass die Menge

$$\{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$$

abzählbar ist.

(b) Zeige, dass $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ überabzählbar ist.