Serie 15

ALGEBRAISCHE KÖRPERERWEITERUNGEN, IRREDUZIBLE POLYNOME

---

87. (a) Sei K ein Körper, sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, und für $\alpha \in K$ sei

$$f(X+\alpha) := \sum_{i=0}^{n} a_i (X+\alpha)^i \ \in K[X]\,.$$

Zeige:

$$f \text{ ist irreduzibel über } K \iff f(X+\alpha) \text{ ist irreduzibel über } K \text{ für alle } \alpha \in K$$

(b) Zeige, dass für jede Primzahl p, $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

Hinweis: Ersetze X durch $X+1$ und verwende (a) und das Eisenstein-Schönemann Kriterium.

88. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nicht isomorph sind als Körper, aber als Vektorräume über $\mathbb{Q}$.

89. Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 8$.

90. Finde ein Beispiel für eine Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ mit $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, sodass für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt: $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{q})$.

91. (a) Zeige: Ist eine Körpererweiterung $L : K$ endlich, so ist sie algebraisch und wird von endlich vielen Elementen erzeugt.

Bemerkung: Die andere Richtung wird in der Vorlesung gezeigt (siehe Satz 14.7.(b)).

(b) Seien $M : L$ und $L : K$ Körpererweiterungen.

Zeige: $M : K$ ist genau dann algebraisch, wenn $M : L$ und $L : K$ algebraisch sind.