

Serie 16

DIE MÖBIUSFUNKTION

Für eine Folge $A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ von Zahlen $a_n \in \mathbb{Z}$ sei $A(s)$ die formale Reihe

$$A(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

92. Zeige, dass für zwei Folgen $A = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ und $B = (b_l)_{l=1}^{\infty}$ gilt:

$$A(s) \cdot B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{kl=n} a_k b_l}{n^s}$$

Sei $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die *Riemann'sche Zetafunktion* und für natürliche Zahlen $n \geq 1$ sei die *Möbiussequenz* $\mu(n)$ wie folgt definiert:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } p^2 \mid n \text{ für eine Primzahl } p, \\ (-1)^{t_n} & \text{falls } n = p_1 \cdot \dots \cdot p_{t_n} \text{ für paarweise verschiedene Primzahlen } p_i. \end{cases}$$

Weiter sei

$$M(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

die *Möbiusfunktion*.

93. Zeige:

$$M(s) \cdot \zeta(s) = 1$$

94. Seien $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ zwei Funktionen für die gilt:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

Zeige, dass dann gilt:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Hinweis: Für $F = (f(n))_{n=1}^{\infty}$ und $G = (g(n))_{n=1}^{\infty}$ gilt $F(s) = \zeta(s) \cdot G(s)$.