Serie 19

ALGEBRAISCHER ABSCHLUSS & NORMALE KÖRPERERWEITERUNGEN

---

104. Sei $L : K$ eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\tilde{K}$ aller über K algebraischen Elemente von L heisst *der (relative) algebraische Abschluss von* K *in* L. Zeige:

(a) $\tilde{K}$ ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von $L : K$, der algebraisch über K ist.

(b) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K im Sinne der Vorlesung.

(c) Gilt die Folgerung in (b) auch im Fall $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ (d.h. für $L = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Q}$)?

(d) Seien $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, und $\overline{\mathbb{Q}}^+$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Zeige $[\overline{\mathbb{Q}} : \overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

105. Sei p ein Primzahl, sei $L := \mathbb{F}_p(t)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_p$ in der Variablen t (d.h. der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[t]$), und sei $K := \mathbb{F}_p(t^p)$.

Zeige: Das Polynom $X^p - t^p$ ist irreduzibel und inseparabel über K, und L ist sein Zerfällungskörper.

106. Finde ein Beispiel einer algebraischen Körpererweiterung $L : K$ mit den folgenden Eigenschaften.

(a) $L : K$ ist endlich, nicht separabel und K hat positive Charakteristik.

(b) $L : K$ ist nicht endlich, aber normal.

(c) $L : K$ ist nicht endlich und nicht normal.

107. Entscheide jeweils, ob für die folgenden beiden $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ normal ist. Falls die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ nicht normal ist, so bestimme eine *normale Hülle* der Erweiterung, d.h. einen kleinsten Oberkörper von $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)}$, sodass $\widetilde{\mathbb{Q}(\alpha)} : \mathbb{Q}$ normal ist.

(a) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(b) $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$