Serie 21

Galoisgruppen und Repetitionsaufgaben

112. Sei L der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

Berechne $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$.

113. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein separables Polynom. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstelle von f in einem algebraischen Abschluss von K. Mit Satz 19.4 kann $\mathrm{Gal}(f)$ in die symmetrische Gruppe $S(a_1, \ldots, a_n)$ eingebettet werden. Das bedeutet, dass $\mathrm{Gal}(f)$ auf den Nullstellen von f operiert.

Zeige: Für jedes $i = 1, \ldots, n$ ist die Bahn von a_i dieser Operation genau die Menge der Nullstellen des irreduziblen Faktors von f, dessen Nullstelle a_i ist.

114. Sind die folgenden Körper isomorph?

(a) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 2)$;

(b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 2)$;

(c) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 2)$;

(d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.

115. (a) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über dem Körper K.
Zeige, dass dann gilt

$$\big[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K\big] \leqslant \prod_{i=1}^{n} \big[K(\alpha_i) : K\big].$$

(b) Zeige am Beispiel $\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}\big) : \mathbb{Q}$, dass die Ungleichung in (a) auch strikt sein kann.

(c) Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{18}\big) : \mathbb{Q}$ normal?

116. Sei $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, e^{\frac{\pi i}{4}})$.

Zeige, dass die Körpererweiterung $L : \mathbb{Q}$ normal ist und bestimme $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$.