

## Serie 22

### HAUPTSATZ DER GALOISTHEORIE I

---

- 117.** Sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $X^4 - 4$  über  $\mathbb{Q}$ .  
Bestimme alle Zwischenkörper  $K$  mit  $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq L$ .
- 118.** Sei  $f \in K[X]$  irreduzibel und separabel und sei  $L$  ein Zerfällungskörper von  $f$  über  $K$ .  
Zeige: Ist  $\text{Gal}(L : K)$  abelsch, so ist  $L = K(a)$  für eine beliebige Nullstelle  $a \in L$  von  $f$ .
- 119.** Sei  $L_f$  der Zerfällungskörper von  $f = X^3 - 3$  über  $\mathbb{Q}$ .
- (a) Zeige:  $L_f = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}i)$ .
  - (b) Finde ein  $\alpha \in L_f$  mit  $\mathbb{Q}(\alpha) = L_f$  und bestimme das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $\mathbb{Q}$ .
  - (c) Finde einen Zwischenkörper  $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq L_f$  mit  $\text{Gal}(L_f : M) \cong C_2$ .
- 120.** Sei  $L_f$  der Zerfällungskörper von  $f = X^5 - 1$  über  $\mathbb{Q}$ .
- (a) Bestimme  $\text{Gal}(L_f : \mathbb{Q})$ .
  - (b) Bestimme alle Zwischenkörper  $M$  mit  $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$ .
  - (c) Sei  $\xi := e^{\frac{2\pi i}{5}}$ . Bestimme das Minimalpolynom von  $\xi + \xi^4$  über  $\mathbb{Q}$ .