Serie 24

Der Fundamentalsatz der Algebra

---

122. In dieser Aufgabe beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra (der besagt, dass $\mathbb{C}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{R}$ ist) mit Hilfe der Galoistheorie.

Sei $L : \mathbb{R}$ eine endliche Körpererweiterung, wobei in (a) – (e) angenommen wird, dass die Körpererweiterung $L : \mathbb{R}$ *galoissch* ist.

(a) Zeige, dass ein sogenannter *Körperturm* $L = L_n : \ldots : L_0 : \mathbb{R}$ existiert, sodass $[L_0 : \mathbb{R}]$ ungerade ist und für jedes $0 \leqslant i \leqslant n-1$ die Erweiterung $L_{i+1} : L_i$ den Grad 2 hat.

(b) Zeige, dass $\mathbb{R}$ keine nichttriviale Erweiterung von ungeradem Grad hat.

(c) Zeige, dass jede Erweiterung von $\mathbb{R}$ vom Grad 2 isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

(d) Zeige, dass $\mathbb{C}$ keine Erweiterung vom Grad 2 hat.

(e) Folgere, dass L entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

Sei nun $L : \mathbb{R}$ eine endliche Körpererweiterung die nicht galoissch ist.

(f) Zeige, dass L entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.