

Serie 25

RADIKALERWEITERUNGEN UND AUFLÖSBARE GRUPPEN

- 123.** Sei $L : K$ eine Radikalerweiterung in \mathbb{C} und sei \tilde{L} die normale Hülle von $L : K$.
Zeige: $\tilde{L} : K$ ist eine Radikalerweiterung.
- 124.** Sei $\zeta := e^{2\pi i/p}$ für eine ungerade Primzahl p .
- (a) Zeige: $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = p - 1$. (*Hinweis:* Eisenstein-Kriterium.)
 - (b) Zeige: $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}) \cong C_{p-1}$.
- 125.** Zeige, dass die Nullstellen des Polynoms $X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ nicht durch Radikale ausdrückbar sind.
- 126.** Sei $n \geq 5$ eine natürliche Zahl.
- (a) Zeige, dass die Gruppe A_n einfach ist.
Hinweis: Sei $N \trianglelefteq A_n$ ein nichttrivialer Normalteiler. Zeige, dass N einen 3-Zykel der Form $ngn^{-1}g^{-1}$ mit $n \in N$ und $g \in A_n$ enthält.
 - (b) Folgere daraus, dass A_n die einzige normale Untergruppe von S_n ist.
- 127.**
- (a) Zeige, dass für $n = 2, 3, 4$ die Gruppe S_n auflösbar ist.
 - (b) Zeige, dass für $n \geq 5$ die Gruppe S_n nicht auflösbar ist.