

## Serie 13

### DREI AUFGABEN ZU ALGEBRA I

---

80. Finde die kleinste positive ganze Zahl  $n$  für die gilt:

$$\begin{aligned}n &\equiv 5 \pmod{7} \\n &\equiv 7 \pmod{10} \\n &\equiv 10 \pmod{13}\end{aligned}$$

81. Bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 20.

82. Im Ring  $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$  gilt die Gleichheit

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

Zeige:

- (a) Die Funktion  $N: R \rightarrow \mathbb{N}, z = a + bi\sqrt{5} \mapsto |z|^2 = a^2 + 5b^2$  ist multiplikativ (das heisst,  $\forall \alpha, \beta \in R: N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ ).
- (b)  $R^* = \{u \in R \mid N(u) = 1\} = \{\pm 1\}$ .
- (c) Die Elemente  $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$  sind unzerlegbar in  $R$ .
- (d) Die Elemente  $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$  sind keine Primelemente in  $R$ .
- (e) Für das Ideal  $I = (2, 1 + i\sqrt{5})$  gilt  $I \cdot I = (2)$ .
- (f)  $I$  ist kein Hauptideal von  $R$ .
- (g)  $I$  ist ein maximales Ideal von  $R$ .
- (h) Kein anderes Primideal enthält die Zahl 2.
- (i)  $R$  ist nicht faktoriell.