Satz 14.7 Sei $L:K$ eine Körpererweiterung, $A \subseteq L$ mit $L = K(A)$ und jedes Element aus A sei alg. über K.

Dann gilt: (a) $L:K$ ist algebraisch

(b) $|A| < \infty \Rightarrow [L:K] < \infty$

$L:K$ alg. & $|A| < \infty \Leftarrow [L:K] < \infty$ (Aufg. 91. (a))

Beweis: Wir zeigen (a) und (b) zusammen:

- $K(A) = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{endl.}}} K(B)$; $B \subseteq A \Rightarrow K(B) \subseteq K(A)$
- Ist $r \in K(A)$, so ist $r = \frac{r_1}{r_2}$ für $r_1, r_2 \in K[A]$, weil $K(A) = \operatorname{Quot}(K[A])$.
  D.h. $r = \frac{r_1}{r_2}$ mit $r_1, r_2 \in \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \in K \wedge a_i \in B\}$ für $B \subseteq A$, B endlich. Somit ist $r \in K(B) = K(a_1, \dots, a_n)$.

- Sei nun $B = \{a_1, \dots, a_n\}$; $r \in K(a_1, \dots, a_n) = K(B)$.
  Für jedes $r \in K(A)$ ex. ein endl. $B \subseteq A$ mit $r \in K(B)$.
- Es gilt $K \subseteq K(a_1) \subseteq K(a_1, a_2) \subseteq \dots \subseteq K(a_1, \dots, a_n)$, und $K(a_1, \dots, a_{i-1})(a_i) = K(a_1, \dots, a_i)$.
- Für $a_i \in A$ ist nach Voraussetzung a_i alg. über K und somit ist a_i auch alg. über $K(a_1, \dots, a_{i-1})$.
- Mit dem Gradsatz 14.1 ist dann $[K(B):K]$ endlich und mit Aufg. 91. (a) ist die Körpererw. $K(B):K$ alg.
- Somit ist $r \in K(B)$ alg. über K und weil r beliebig war, ist $K(A):K$ alg. (zu jedem $r \in K(A)$ ex. $B \subseteq A$, B endl.).

$\dashv$

Korollar 14.8 Sind $M:L$ und $L:K$ alg., so ist auch $M:K$ alg.

[siehe Aufg. 91. (c) auch für Umkehrung]

Satz 14.9 Sei $M:K$ eine Körpererweiterung und sei $L := \{a \in M : a \text{ alg. über } K\}$, so ist L ein Körper.

__Beweis:__ $K \subseteq L \subseteq M$; seien $a, b \in M$ alg. über K.

z. zeigen: $a-b$, ab^{-1} (für $b \neq 0$) sind in L.

- Es gilt $K = K(a,b) \subseteq L$ und $K(a,b):K$ ist endlich. D.h. $K(a,b):K$ ist alg. und somit sind $a-b$ und ab^{-1} ($b \neq 0$) alg. über K (weil sie in $K(a,b)$ liegen), also $a-b, ab^{-1} \in L$. $\dashv$

15. Zerfällungskörper

[Zuerst beweisen wir eine Folgerung aus Satz 14.6.]

__Korollar 15.1__ Es sei $f \in K[X]$ ein beliebiges Polynom vom Grad n. Dann existiert ein Erweiterungskörper L von K mit $[L:K] \leq n!$, über dem f in Linearfaktoren zerfällt.

__Beweis:__ Mit Induktion über n. Für $n=1$ ist f bereits in der richtigen Form. Sei $n \geq 2$ und sei die Aussage für alle $n' < n$ bewiesen. Mit Satz 14.6 ex. eine einfache Körpererweiterung $K(a) =: K_1$ mit $f(a) = 0$ und $[K_1 : K] \leq n$, da das Min. Pol. von a das Polynom f teilt.

- In K_1 gilt $f = (X-a) \cdot g$, wobei $g \in K_1[X]$ und $\text{grad}(g) = n-1 < n$.
- Nach Ind.-Vor. ex. $L \supseteq K_1$ über dem g in Linearfaktoren zerfällt. Dann zerfällt f in L in Linearfaktoren und weil mit Ind.-Vor. $[L:K_1] \leq (n-1)!$ ist, erhalten wir $[L:K] \leq n \cdot (n-1)! = n!$ $\dashv$

__Def.__ Es sei $f \in K[X]$ gegeben. Der Oberkörper $L \supseteq K$ von minimalem Grad über K, über dem f in Linearfaktoren zerfällt, heisst __Zerfällungskörper__ von f über K.

Der Zerfällungskörper von $f \in K[X]$ über K ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Es gilt sogar:

Satz 15.2 Sei $f \in K[X]$ und sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Weiter sei $\varphi: K \xrightarrow{\sim} K'$ ein Körperisom. und $L' \supseteq K'$ ein Zerfällungskörper von $\varphi f \in K'[X]$ über K'. Dann ex. ein Körperisom. $\tilde{\varphi}: L \xrightarrow{\sim} L'$ mit $\tilde{\varphi}|_K = \varphi$.

Beweis: Mit Induktion über dem Grad von f.

- Für $\operatorname{grad}(f) = 1$ ist nichts zu beweisen. ($K = L$, $K' = L'$)
- Sei $n = \operatorname{grad}(f) > 1$. Dann zerfällt f in L in Lin.-Faktoren,
$$f = b_n(X - a_1) \cdot \ldots \cdot (X - a_n), \quad b_n \in K, a_i \in L.$$
- Es sei $h \in K[X]$ das Minimalpolynom von a_1 über K.
- Dann gilt $h | f$ und es folgt $\varphi h | \varphi f$. Da φf in L' in Lin.-Faktoren zerfällt (φ ist ein Isom.), muss gelten:
$$\varphi h = (X - a_1') \cdot \ldots \cdot (X - a_n'), \quad a_i' \in L'. \quad (\varphi h \text{ normiert})$$
- Da φh irred. ist über K' (φ ist Isom.), ist φh Min.-Pol. von z.B. a_1' über K'. Mit Satz 14.4.(b) ex. ein Isom. $\bar{\varphi}: K(a_1) \xrightarrow{\sim} K'(a_1')$ mit $\bar{\varphi}|_K = \varphi$ und $\bar{\varphi}(a_1) = a_1'$.
- Nun ist L ein Zerfällungskörper von $g = f : (X - a_1)$ (Abspalten von Nullstelle) über $K(a_1)$, und $\bar{\varphi} g = \bar{\varphi}(\underbrace{f : (X - a_1)}_{= g}) = \varphi f : (X - \underbrace{a_1'}_{\bar{\varphi}(a_1)})$ zerfällt in L' in Linearfaktoren.
- Nach Ind.-Vor. ex. ein Körperisom. $\tilde{\varphi}: L \to L'$ mit $\tilde{\varphi}|_{K(a_1)} = \bar{\varphi}$.
- Somit gilt, weil $\bar{\varphi}|_K = \varphi$, $\tilde{\varphi}|_K = \varphi$ und $\tilde{\varphi}(a_1) = a_1'$. ⊣