<u>Korollar 20.8</u> Ist M ein Zwischenkörper, $K \subseteq M \subseteq L$, und ist $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$, so ist $\sigma[M]$ ein Körper mit $K \subseteq \sigma[M] \subseteq L$ und es gilt:

$$\mathrm{Gal}(L:\sigma[M]) = \sigma \underbrace{\overbrace{\mathrm{Gal}(L:M)}^{\text{konj. Untergruppe}}}_{\leq \mathrm{Gal}(L:K)} \sigma^{-1} \leq \mathrm{Gal}(L:K)$$

<u>Beweis:</u> · Weil $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$ ein K-Automorphismus von L ist, ist $\sigma[M]$ ein Körper und weil $K \subseteq M$ und $\sigma|_K = \mathrm{id}$, ist $\sigma[M] \supseteq K$.

· Ist $\tau \in \mathrm{Gal}(L:M)$ und $x \in M$, so ist $\tau(x) = x$ (weil τ ein M-Autom. von L ist) und $\sigma(x) \in \sigma[M]$ (nach Def.). Somit ist $\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma x) = \sigma\tau(x) = \sigma(x)$, also

$$\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathrm{Gal}(L:\sigma[M])$$

und es gilt: $\qquad \sigma\,\mathrm{Gal}(L:M)\sigma^{-1} \leq \mathrm{Gal}(L:\sigma[M])$

$\tau \in \mathrm{Gal}(L:M)$

· Ist $\tilde\tau \in \mathrm{Gal}(L:\sigma[M])$ und $\sigma(x) \in \sigma[M]$, $x \in M$, so ist $\tilde\tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$ (weil $\tilde\tau$ ein $\sigma[M]$-Autom. von L ist).
D.h. $\sigma^{-1}\tilde\tau(\sigma(x)) = \sigma^{-1}\tilde\tau\sigma(x) = \sigma^{-1}(\sigma(x)) = x$, und somit ist $\sigma^{-1}\tilde\tau\sigma$ ein M-Autom. von L, also

$$\sigma^{-1}\tilde\tau\sigma \in \mathrm{Gal}(L:M).$$

Es gilt somit: $\qquad \mathrm{Gal}(L:\sigma[M]) \leq \sigma\,\mathrm{Gal}(L:M)\sigma^{-1}$

$\tilde\tau \in \mathrm{Gal}(L:\sigma[M])$

· Damit ist $\mathrm{Gal}(L:\sigma[M]) = \sigma\,\mathrm{Gal}(L:M)\sigma^{-1}$.

$\dashv$

<u>Def.</u> Ist $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$ und M ein Zwischenkörper, so heisst $\sigma[M]$ der unter σ zu M <u>konjugierte Körper</u>.

<u>Korollar 20.9</u> Ist M ein Zwischenkörper, $K \subseteq M \subseteq L$, dann ist die Körpererweiterung $M:K$ genau dann normal, wenn $\mathrm{Gal}(L:M) \trianglelefteq \mathrm{Gal}(L:K)$.

__Beweis:__ · Ist die Körpererweiterung $M:K$ normal, so liegt mit Kor. 19.3 jedes zu $a \in M$ konjugierte Element wiederum in M. D.h. für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$ ist $\sigma(a) \in M$, also gilt $\sigma[M] = M$. Mit Kor. 20.8 gilt nun (für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$)

$$\sigma \,\mathrm{Gal}(L:M)\, \sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(L:\sigma[M]) = \mathrm{Gal}(L:M),$$

d.h. $\mathrm{Gal}(L:M) \trianglelefteq \mathrm{Gal}(L:K)$.

· Sei umgekehrt $H \trianglelefteq \mathrm{Gal}(L:K)$ und sei $M := L^H$. Dann ist $K \subseteq M \subseteq L$. Für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$ gilt:

$$\sigma[M] = L^{\sigma H \sigma^{-1}} \underset{H \trianglelefteq \mathrm{Gal}(L:K)}{=} L^H = M$$

Somit enthält der Körper M mit jedem $a \in M$ auch alle zu a konj. Elemente (weil $L:K$ normal ist und $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$ beliebig ist). D.h. die Körpererweiterung $M:K$ ist normal. ⊣

__Bem.__ Wenn $M:K$ normal ist, dann ist $M:K$ auch galoissch (weil $L:K$ galoissch ist). Mit dem folgenden Korollar können wir $\mathrm{Gal}(M:K)$ bestimmen.

__Korollar 20.10__ Ist M ein Zwischenkörper, $K \subseteq M \subseteq L$, und ist $M:K$ normal, dann gilt:

$$\mathrm{Gal}(L:K) / \mathrm{Gal}(L:M) \cong \mathrm{Gal}(M:K)$$

__Beweis:__ Ist $M:K$ normal, so gilt für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K)$, $\sigma[M] = M$. Damit ist

$$\pi : \mathrm{Gal}(L:K) \to \mathrm{Gal}(M:K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_M$$

ein Gruppenhomom. Es ist $\ker(\pi) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L:K) : \sigma|_M = \imath\}$, ($\imath$ = Identität)
d.h. $\ker(\pi) = \mathrm{Gal}(L:M)$. Damit induziert π einen Isom.

$$\mathrm{Gal}(L:K) / \mathrm{Gal}(L:M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(M:K)$$

und wir erhalten $\mathrm{Gal}(L:K) / \mathrm{Gal}(L:M) \cong \mathrm{Gal}(M:K)$. ⊣

<u>Ein Beispiel</u> Sei L der normale Abschluss von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, d.h. $L:\mathbb{Q}$ ist die kleinste normale Körpererweiterung mit $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in L$.

- $L = \mathbb{Q}(a_1)$ mit $a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Das Min.-Poly. von a_1 über $\mathbb{Q}$ ist

$$f = \prod (X - (\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3})) = 1 - 10X^2 + X^4.$$

mit den 4 Nullstellen: $a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$,
(Bem. $a_1 + a_2 = 2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \in L$) $a_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $a_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

- $$[L:\mathbb{Q}] = \underbrace{[L:\mathbb{Q}(\sqrt{2})]}_{=2} \cdot \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]}_{=2} = 4 = |\mathrm{Gal}(L:\mathbb{Q})|$$

Somit ist $\mathrm{Gal}(L:\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} C_4 & \text{(nicht möglich, warum?)} \\ C_2 \times C_2 \end{cases}$

- Sei $C_2 \times C_2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\}\}$, dann sind

$$\tilde{A} = \langle (0,1) \rangle, \quad \tilde{B} = \langle (1,1) \rangle, \quad \tilde{C} = \langle (1,0) \rangle$$

die drei nicht-trivialen Untergruppen von $C_2 \times C_2$, und weil $C_2 \times C_2$ abelsch ist, sind $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ Normalteiler von $C_2 \times C_2$.

- Es gilt $\quad C_2 \times C_2 / \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \cong C_2$ und $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \cong C_2$.

- $C_2 \times C_2$

$$\begin{array}{ccc} & C_2 \times C_2 & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \sqrt{2} \leftrightarrow -\sqrt{2} & & \sqrt{3} \leftrightarrow -\sqrt{3} \end{array}$$

- Die Elemente $\alpha \in \mathrm{Gal}(L:\mathbb{Q})$ sind bestimmt durch $\alpha(a_1)$:

$$\alpha(a_1) = \begin{cases} \begin{array}{llll} & \text{Bild von } \sqrt{2} & \sqrt{3} & \\ a_1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \Rightarrow \alpha = \iota, \ \alpha \mathrel{\hat{=}} (0,0) \\ a_2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} & \Rightarrow \alpha^2 = \iota, \ \alpha \mathrel{\hat{=}} (0,1) \\ a_3 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & \Rightarrow \alpha^2 = \iota, \ \alpha = (1,0) \\ a_4 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & \Rightarrow \alpha^2 = \iota, \ \alpha = (1,1) \end{array} \end{cases}$$

Seien $A, B, C \leq Gal(L:K)$ die Untergruppen von $Gal(L:\mathbb{Q})$ welche den Untergruppen von $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \leq C_2 \times C_2$ entsprechen.

- $L^A = \{a \in L : \forall \sigma \in A\,(\sigma(a) = a)\}$

$$\Longrightarrow Gal(L:L^A) = \{\sigma \in G : \sigma(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\}$$

und es gilt $L^A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Weil $\tilde{A} \trianglelefteq C_2 \times C_2$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}$ galoissch mit

$$Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2 / \tilde{A} \cong C_2$$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist der Zerfällungskörper von $f = X^2 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

- Analog erhalten wir $L^C = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mit $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}) \cong C_2$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist Zerfällungskörper von $X^2 - 3$ über $\mathbb{Q}$.

- $L^B = \{a \in L : \forall \sigma \in B\,(\sigma(a) = a)\}$:

$\sigma \in B$, $\sigma \neq 1$, dann ist $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ und $\sigma(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

Somit ist $L^B = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$, denn $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ und für $\sigma \neq 1$ ist

$$\sigma(\sqrt{6}) = \sigma(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = \sigma(\sqrt{2}) \cdot \sigma(\sqrt{3}) = -\sqrt{2} \cdot -\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

- Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \{(0,0)\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\tilde{A} \cong C_2 \arrow[dr] & \tilde{B} \cong C_2 \arrow[d] & \tilde{C} \cong C_2 \arrow[dl] \\
 & C_2 \times C_2 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & L & \\
L^A = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[ur, "f_A"] & L^B = \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \arrow[u, "f_B"] & L^C = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[ul, "f_C"'] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "X^2-2"] \arrow[u, "X^2-6"] \arrow[ur, "X^2-3"'] &
\end{tikzcd}$$

- Da $L:\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ galoissch ist, ex. $b \in L$ mit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(b)$.
  Das Min.-Poly. eines solchen b über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist $f_A = \underbrace{-1 + 2\sqrt{2}X + X^2}_{\in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]}$
- Analog ist $f_C = 1 - 2\sqrt{3}X + X^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[X]$
- Für f_B betrachten wir $1 - 10X^2 + X^4 = 1 - 10Y + Y^2$ mit

  $Y = 5 \pm 2\sqrt{6}$ und erhalten $X = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}$

  Somit ist $f_B = X^2 - \underbrace{(5 + 2\sqrt{6})}_{=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{6})[X]$

Beachte: $\sqrt{6} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \underbrace{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}_{\in L} = \sqrt{2} \in L$