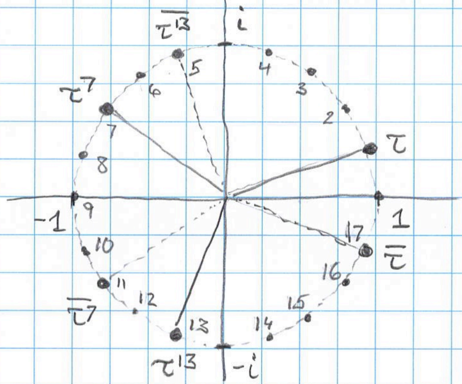
Die Galoiserweiterung $L_f : \mathbb{Q}$ für $f = X^6 - 3X^2 - 1$

Sei $f = X^6 - 3X^2 - 1$ und sei L_f der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Im Folgenden werden alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $L_f : \mathbb{Q}$ bestimmt, sowie die zugehörigen Untergruppen (und Quotientengruppen) von $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q})$.

- Wir setzen zuerst $Y := X^2$ und definieren $g = Y^3 - 3Y - 1$. Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 die drei Nullstellen von g, so sind $\pm\zeta_1 = \pm\sqrt{\xi_1}$, $\pm\zeta_2 = \pm\sqrt{\xi_2}$, $\pm\zeta_3 = \pm\sqrt{\xi_3}$ die sechs Nullstellen von f und $L_f = \mathbb{Q}(\zeta_i : 1 \leq i \leq 6)$.
  Es gilt somit $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q}) \leq S_6$.

- Die Nullstellen ξ_i: Mit elementaren Mitteln (oder mit der Lösungsformel für cubische Gleichungen) lassen sich ξ_1, ξ_2, ξ_3 ausrechnen:



Sei $\varphi := \frac{\pi}{9}$ und $\tau := e^{i\varphi}$

Dann ist:

$$\xi_1 = (\tau + \overline{\tau}) = 2\cos(\varphi)$$

$$\xi_2 = (\tau^7 + \overline{\tau}^7) = 2\cos(7\varphi)$$

$$\xi_3 = (\tau^{13} + \overline{\tau}^{13}) = 2\cos(13\varphi)$$

Zum Beispiel ist $\xi_1^3 = (\tau^3 + 3\underbrace{\tau^2\overline{\tau}}_{=\tau} + 3\underbrace{\tau\overline{\tau}^2}_{=\overline{\tau}} + \overline{\tau}^3) = \underbrace{\tau^3 + \overline{\tau}^3}_{=1} + 3\xi_1$

d.h. $\xi_1^3 = 3\xi_1 + 1$ und ξ_1 ist eine Nullstelle von $Y^3 - 3Y - 1$.

Weiter ist $2 - \xi_1^2 = 2 - (\tau^2 + 2\underbrace{\tau\overline{\tau}}_{=1} + \overline{\tau}^2) = 2 - (2 - \xi_2) = \xi_2$

und $2 - \xi_2^2 = 2 - (\tau^{14} + 2\underbrace{\tau^7\overline{\tau}^7}_{=1} + \overline{\tau}^{14}) = 2 - (2 - \xi_3) = \xi_3$

Insbesondere ist $\xi_3 = 2 - (2 - \xi_1^2)^2$.

D.h. $\mathbb{Q}(\xi_1) = \mathbb{Q}(\xi_2) = \mathbb{Q}(\xi_3)$ und $\mathbb{Q}(\xi_1)$ ist der Zerfällungskörper von g über $\mathbb{Q}$. Sei $L_g = \mathbb{Q}(\xi_1)$; dann ist die Körpererweiterung $L_g : \mathbb{Q}$ einfach und normal, also galoissch.

- Sei $G_f := Gal(L_f : \mathbb{Q})$ und sei $G_g := Gal(L_g : \mathbb{Q})$.
  Dann ist $G_f \cong C_3$ und $Gal(L_f : L_g) \trianglelefteq G_f$, und es gilt $C_3 \cong G_f / Gal(L_f : L_g)$.

- Wir betrachten nun $Gal(L_f : L_g)$: Sei $\sigma \in Gal(L_f : L_g)$.
  Dann muss gelten $\sigma(\xi_i) = \xi_i$ für $1 \leq i \leq 3$. Daraus folgt $\sigma(\zeta_i) = \pm \zeta_i$ für $1 \leq i \leq 3$, denn $\sigma(\underbrace{\zeta_i \cdot \zeta_i}_{\xi_i}) = \sigma(\zeta_i) \cdot \sigma(\zeta_i) \overset{!}{=} \xi_i$.

  Somit ist $Gal(L_f : L_g) \leq C_2 \times C_2 \times C_2$

- Adjungieren wir zu L_g eine Nullstelle ζ_i $(1 \leq i \leq 3)$, so erhalten wir den Zwischenkörper $L_g(\zeta_i)$. Es gibt 3 Möglichkeiten für Zwischenkörper $L_g(\zeta_i)$. Diese drei Zwischenkörper sind isomorph, aber verschieden. Obwohl die Zwischenkörper $L_g(\zeta_i)$ isomorph sind, haben die ζ_i versch. Minimalpolynome über L_g, nämlich $Z^2 - \xi_i^2$. Da $L_g(\zeta_i) : L_g$ eine normale Erweiterung ist, gilt $Gal(L_g(\zeta_i) : L_g) \cong C_2$.
- Adjungieren wir eine weitere Nullstelle ζ_j zu $L_g(\zeta_i)$ $(i \neq j)$, mit Minimalpolynom $Z^2 - \xi_j^2$, so erhalten wir $L_g(\zeta_i, \zeta_j) = L_f$.
  Um dies zu sehen, betrachten wir das Produkt $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3$:

$$\left.\begin{aligned} \text{Weil } (Y-\xi_1)\cdot(Y-\xi_2)\cdot(Y-\xi_3) &= Y^3 + \ldots - \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \\ &\overset{!}{=} Y^3 - 3Y - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 = 1$$

$$\text{Also ist } \underbrace{\sqrt{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3}}_{= \sqrt{1} = 1} = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 \Rightarrow \zeta_3 = \frac{1}{\zeta_1 \cdot \zeta_2} \quad \text{und}$$

somit ist $\zeta_3 \in L_g(\zeta_1, \zeta_2)$.

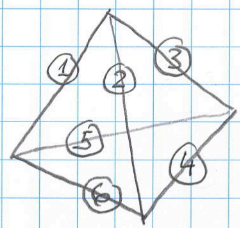
· Nun können wir $Gal(L_f : \mathbb{Q})$ bestimmen:

Ist $\sigma \in Gal(L_f : \mathbb{Q})$, so permutiert σ die drei Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_3 zyklisch, und vertauscht $\xi_i \leftrightarrow -\xi_i$ und zwar so, dass immer zwei oder keines der Vorzeichen von ξ_i wechselt (das folgt aus $\xi_i = \frac{1}{\xi_j \cdot \xi_k}$).

· Betrachten wir

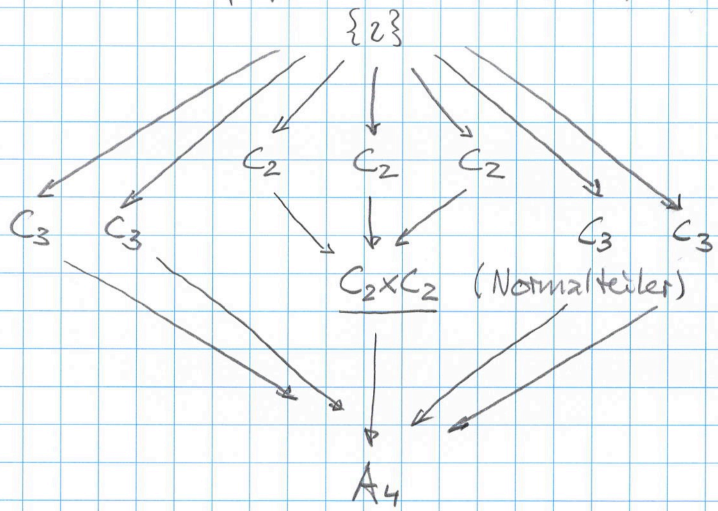
①	②	③	④	⑤	⑥
ξ_1	ξ_2	ξ_3	$-\xi_1$	$-\xi_2$	$-\xi_3$

als die 6 Kanten eines Tetraeders, so sehen wir, dass $Gal(L_f : \mathbb{Q}) \cong T$ (der Tetraedergruppe A_4) ist.

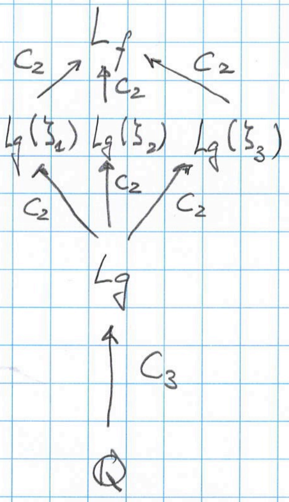


D.h. die 6 Nullstellen von f werden durch $Gal(L_f : \mathbb{Q})$ wie die Kanten eines Tetraeders permutiert. ($\text{Kanten}_{\text{Tetraeder}} \hat{=} \text{Nullstellen}_{\xi_i}$)

· Die Untergruppen von $Gal(L_f : \mathbb{Q}) \cong A_4$:



bereits gefundene Zwischenkörper:



· Es fehlen uns noch die 4 Zwischenkörper M_i mit $Gal(L_f : M_i) \cong C_3$.

Seien $H_1 = \langle (1\,2\,3) \rangle$, $H_2 = \langle (1\,5\,6) \rangle$, $H_3 = \langle (3\,4\,5) \rangle$, und $H_4 = \langle (2\,6\,4) \rangle$ die 4 Untergruppen von A_4, welche isomorph zu C_3 sind. Dann sind die 4 Zwischenkörper M_i die 4 Fixkörper, also

$$M_i = L_f^{H_i} = \{ a \in L_f : \forall \sigma \in H_i \, (\sigma(a) = a) \}.$$

Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ wie folgt definiert:

$$\vartheta_1 := \xi_1(+\zeta_2-\zeta_3) + \xi_2(+\zeta_3-\zeta_1) + \xi_3(+\zeta_1-\zeta_2)$$
$$\vartheta_2 := \xi_1(-\zeta_2+\zeta_3) + \xi_2(-\zeta_3-\zeta_1) + \xi_3(+\zeta_1+\zeta_2)$$
$$\vartheta_3 := \xi_1(-\zeta_2-\zeta_3) + \xi_2(+\zeta_3+\zeta_1) + \xi_3(-\zeta_1+\zeta_2)$$
$$\vartheta_4 := \xi_1(+\zeta_2+\zeta_3) + \xi_2(-\zeta_3+\zeta_1) + \xi_3(-\zeta_1-\zeta_2)$$

Dann ist $M_i = \mathbb{Q}(\vartheta_i)$. Weiter lässt sich nachprüfen, dass für $\sigma_2 = (2\,5)(3\,6)$, $\sigma_3 = (1\,4)(2\,5)$, $\sigma_4 = (1\,4)(3\,6)$ gilt:

$$L_f^{\sigma_2 H_1 \sigma_2^{-1}} = M_2, \quad L_f^{\sigma_3 H_1 \sigma_3^{-1}} = M_3, \quad L_f^{\sigma_4 H_1 \sigma_4^{-1}} = M_4$$

Dies zeigt, dass die Körper M_i konjugierte Zwischenkörper sind.

- Weiter lässt sich zeigen, dass $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ alle dasselbe Minimalpolynom haben, nämlich
$$h = X^4 + 18X^2 - 72X + 81.$$
Insbesondere gilt $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = 0$ und $\vartheta_1 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_3 \cdot \vartheta_4 = 81$. Besonders die zweite Gleichung ist überraschend, denn $\vartheta_1 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_3 \cdot \vartheta_4$ ist ein Produkt von Summen von Produkten von $\cos(n \cdot \varphi)$ und Differenzen von Wurzeln von $\cos(n\varphi)$.

- Dass alle 4 ϑ_i dasselbe Minimalpolynom h vom Grad 4 besitzen, bedeutet, dass der Zerfällungskörper L_h ein Unterkörper von L_g ist. Da nun $L_h : \mathbb{Q}$ normal ist, muss $\mathrm{Gal}(L_f : L_h) \trianglelefteq A_4$ sein. Daraus folgt $\mathrm{Gal}(L_f : L_h) = \{\iota\}$ und $L_h = L_f$.

- Die 4 Nullstellen ϑ_i von h werden durch $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q}) \cong A_4$ vertauscht wie die 4 Flächen des Tetraeders. (Nullstellen $\vartheta_i \mathrel{\hat{=}}$ Flächen Tetraeder)