<u>Beweis von Satz 19.9</u> Wir führen den Beweis mit Induktion nach $[L:K]$.

Für $[L:K]=1$ ist nichts zu beweisen. Es sei $[L:K]>1$. Wir wählen einen irreduziblen Faktor g von f mit $\mathrm{grad}(g)=r>1$.

- Da f separabel ist, sind es auch g und $\varphi(g)$.
- Es sei α eine Nullstelle von g. Für jede Nullstelle α_j' $(1\leq j\leq r)$ von $\varphi(g)$ existiert ein Körperhomom. $\varphi_j : K(\alpha)\to L'$ mit $\varphi_j|_K=\varphi$ und $\varphi(\alpha)=\alpha_j'$.
- Mit Induktion, angewandt auf die Körpererweiterung $L:K(\alpha)$ folgt, dass sich jedes φ_j auf genau $[L:K(\alpha)]$ Arten zu einem Körperhomom. $\tilde{\varphi}: L\to L'$ mit $\tilde{\varphi}|_{K(\alpha)}=\varphi_j$ erweitern lässt.
- Wegen $r\cdot[L:K(\alpha)]=[K(\alpha):K]\cdot[L:K(\alpha)]=[L:K]$ ist damit die Existenz von $[L:K]$ verschiedenen Körperhomom. $\tilde{\varphi}: L\to L'$ mit $\tilde{\varphi}|_K=\varphi$ gezeigt.
- Mit Satz 19.7 gibt es aber höchstens $[L:K]$ solche Körperhomom. $\tilde{\varphi}$, womit der Satz bewiesen ist.

$\dashv$

<u>Bemerkung:</u> Ist $L'=L_f$, so gibt es genau $[L_f:K]$ K-Autom. $\tilde{\varphi}: L\to L$.

- Jeder Körperhomom. $\psi: L\to L$ ist injektiv, denn $\ker(\psi)$ ist ein Ideal in L und L hat nur die Ideale L und (0), $L/(0)\cong L$ und L/L ist kein Körper; also ist $\ker(\psi)=(0)$ und ψ inj.
- $\tilde{\varphi}$ bildet die Nullstellen von f inj. auf Nullstellen von $\tilde{\varphi}(f)=f$ ab. Somit ist $\tilde{\varphi}[L]$ Zerfällungskörper von f über K, also $L\cong\varphi[L]$.