Beweis von Satz 14.7 Wir zeigen (a) und (b) zusammen.

- Ist $r \in K(A)$, so ist $r = \frac{r_1}{r_2}$ für $r_1, r_2 \in K[A]$, weil $K(A) = \mathrm{Quot}(K[A])$.
- $K[A]$ besteht aus Polynomen der Form
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \quad \text{mit } \lambda_i \in K \text{ und } \alpha_i = a_{i_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}^{m_k}$$
mit $k \in \mathbb{N}$, $a_{i_l} \in A$, $m_l \in \mathbb{N}$ für $1 \leq l \leq k$.
- Somit ist $r = \frac{r_1}{r_2}$ mit $r_1, r_2 \in K[B]$ für eine endliche Menge $B \subseteq A$, d.h. $r \in K(B) = K(a_1, \ldots, a_n)$ wobei $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Satz 14.7 Sei $L:K$ eine Körpererweiterung, $A \subseteq L$ mit $L = K(A)$ und jedes Element aus A sei alg. über K.
Dann gilt: (a) $L:K$ ist algebraisch
(b) $|A| < \infty \implies [L:K] < \infty$

$L:K$ alg. & $L = K(A)$ für A endl. $\impliedby$ $[L:K] < \infty$ (Aufg. 91. (a))

Beweis: Wir zeigen (a) und (b) zusammen:

- $K(A) = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ endl.}}} K(B)$; $B \subseteq A \implies K(B) \subseteq K(A)$ [warum? siehe unten]
- Ist $r \in K(A)$, so ist $r = \frac{r_1}{r_2}$ für $r_1, r_2 \in K[A]$, weil $K(A) = \operatorname{Quot}(K[A])$. %
  D.h. $r = \frac{r_1}{r_2}$ mit $r_1, r_2 \in \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \in K \wedge a_i \in B\}$ für $B \subseteq A$, B endlich. Somit ist $r \in K(B) = K(a_1, \dots, a_n)$.
- Sei nun $B = \{a_1, \dots, a_n\}$; $r \in K(a_1, \dots, a_n) = K(B)$.
  Für jedes $r \in K(A)$ ex. ein endl. $B \subseteq A$ mit $r \in K(B)$.
- Es gilt $K(a_1) \subseteq K(a_1, a_2) \subseteq \dots \subseteq K(a_1, \dots, a_n)$,
  und $K(a_1, \dots, a_{i-1})(a_i) = K(a_1, \dots, a_i)$.
- Für $a_i \in A$ ist nach Voraussetzung a_i alg. über K und somit ist a_i auch alg. über $K(a_1, \dots, a_{i-1})$.
- Mit dem Gradsatz 14.1 ist dann $[K(B):K]$ endlich und mit Aufg. 91. (a) ist die Körpererw. $K(B):K$ alg.
- Somit ist $r \in K(B)$ alg. über K und weil r beliebig war, ist $K(A):K$ alg. (zu jedem $r \in K(A)$ ex. $B \subseteq A$, B endl.).

$\dashv$

Korollar 14.8 Sind $M:L$ und $L:K$ alg., so ist auch $M:K$ alg.
[siehe Aufg. 91. (c) auch für Umkehrung]

Satz 14.9 Sei $M:K$ eine Körpererweiterung und sei $L := \{a \in M : a \text{ alg. über } K\}$, so ist L ein Körper.