Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir die Gleichung:

$$\sum_{d|n} d \cdot r_d = p^n$$

Setzen wir $g(d) := r_d \cdot d$ und $f(n) := p^n$

so ist $\sum_{d|n} \cancel{d\cdot} g(d) = f(n)$ und mit Aufgabe 94 gilt:

$$\underbrace{n \cdot r_n}_{g(n)} = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \underbrace{p^{n/d}}_{f(n/d)}$$

Nach Def. von $\mu(d)$ ist

$$n \cdot r_n = \underbrace{p^n}_{\mu(1)=1} + \dots + \mu(n) \cdot p \underset{\mu(d) \in \{-1,0,1\}}{\geq} p^n - \sum_{k=1}^{n-1} p^k \geq 2$$

Insbesondere ist $n \cdot r_n \geq 2$ für alle $n \geq 1$, was zu zeigen war. $\dashv$
also $r_n \geq 1$

<u>Beispiele:</u>

- $r_1 = p$; irred. Polynome $X, X+1, \dots, X+(p-1)$

$$r_2 = \frac{1}{2}(p^2 - p) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|2} \mu(d) \cdot p^{2/d} = \frac{1}{2} \cdot (p^2 + \mu(2) \cdot p) = \frac{1}{2}(p^2 - p)$$

$$r_3 = \frac{1}{3}(p^3 - p) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{d|3} \mu(d) \cdot p^{3/d} = \frac{1}{3} \cdot (p^3 + \mu(3) \cdot p) = \frac{1}{3} \cdot (p^3 - p)$$

$$r_4 = \frac{1}{4}(p^4 - p^2) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{d|4} \mu(d) \cdot p^{4/d} = \frac{1}{4} \cdot (p^4 + \mu(2) \cdot p^2 + \underbrace{\mu(4)}_{=0} \cdot p) = \frac{1}{4} \cdot (p^4 - p^2)$$

- Für $p = 7$ erhält man z.B. $r_1 = 7$, $r_2 = 21$, $r_3 = 112$, $r_4 = 588$.