5. Das Auswahlaxiom

1904 (und dann nochmals 1907) hat Ernst Zermelo bewiesen, dass sich jede Menge *wohlordnen* lässt. (Zur Erinnerung: Eine Wohlordnung auf einer Menge A ist eine lineare Ordnung $<$ bei der jede nicht-leere Menge $S \subseteq A$ bezüglich $<$ ein minimales Element hat.) Für die Beweise benutzte Zermelo beide Male ein nicht-konstruktives Prinzip, das sogenannte *Auswahlaxiom*.

9. Auswahlaxiom.

$$\forall \mathscr{F}\Big(\emptyset \notin \mathscr{F} \to \exists f\Big(f \in {}^{\mathscr{F}}\bigcup \mathscr{F} \wedge \forall x \in \mathscr{F}\big(f(x) \in x\big)\Big)\Big)$$

Das *Auswahlaxiom* besagt, das es für jede Familie $\mathscr{F}$ von nicht-leeren Mengen eine Funktion f gibt, die aus jeder Menge $x \in \mathscr{F}$ ein Element $f(x)$ auswählt. Etwas informeller heisst dies, dass jede Familie nicht-leerer Mengen eine Auswahlfunktion besitzt, oder noch etwas kürzer, cartesische Produkte nicht-leerer Mengen sind nicht leer.

Die Axiome ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom AC (für *Axiom of Choice*) ist das Axiomensystem der **Mengenlehre** und wird mit ZFC bezeichnet.

In der Mathematik wird anstelle des Auswahlaxioms meist eine äquivalente Formulierung benutzt, wie zum Beispiel das *Kuratowski-Zorn Lemma* – manchmal auch bloss *Lemma von Zorn* genannt, obwohl Kuratowski dieses Lemma mehr als 10 Jahre vor Zorn bewiesen und publiziert hat. Bevor wir einige, zum Auswahlaxiom äquivalente, Auswahlprinzipien formulieren (und deren Äquivalenz zu AC beweisen), führen wir den Begriff der *Ordinalzahl* ein, welcher eng mit dem Auswahlaxiom zusammenhängt und in der Mengenlehre eine fundamentale Rolle spielt.

Ordinalzahlen

Eine Menge x ist **transitiv** falls $\forall y \in x\,(y \subseteq x)$, d.h. jedes Element von x ist auch Teilmenge von x. Eine Menge α ist eine **Ordinalzahl**, wenn α transitiv ist und durch die Relation $\in$ wohlgeordnet wird. Ist α eine Ordinalzahl, so ist auch

$$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$$

eine Ordinalzahl, denn mit α ist auch $\alpha + 1$ transitiv und wohlgeordnet durch $\in$. Weiter hat jede nicht-leere Teilmenge $u \subseteq \alpha$ ein $\in$-minimales Element, d.h.

$$\forall u \subseteq \alpha\big(u \neq \emptyset \to \exists x \in u\, \forall z \in \alpha\,\big(z \in x \to z \notin u\big)\big).$$

Die Kollektion aller Ordinalzahlen bezeichnen wir mit Ω, d.h. $\alpha \in \Omega$ ist nur eine abgekürzte Schreibweise für *α ist eine Ordinalzahl*. Aus dem folgenden Theorem, das wir nicht beweisen, folgt, dass Ω keine Menge ist – Ω ist eine sogenannte *Klasse* (d.h. eine Kollektion von Mengen).

THEOREM 5.1.

(a) *Ist $\alpha \in \Omega$, dann ist $\alpha = \emptyset$ oder $\emptyset \in \alpha$.*

(b) *Sind $\alpha, \beta \in \Omega$, dann gilt entweder $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\alpha \ni \beta$.*

(c) *Ist $\alpha \in \beta \in \Omega$, so ist $\alpha \in \Omega$.*

(d) *Ist $S \subseteq \Omega$ eine Menge, dann gilt $\bigcap S \in \Omega$ und $\bigcup S \in \Omega$.*

(e) *Ist $S \subseteq \Omega$ eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen, so hat S ein $\in$-minimales Element.*

Aus Theorem 5.1 folgt, dass Ω durch $\in$ wohlgeordnet wird. Wäre also Ω eine Menge (also ein Objekt in einem Modell von ZF oder von ZFC), so wäre Ω selbst eine Ordinalzahl, also $\Omega \in \Omega$, was aber dem Fundierungsaxiom widerspricht.

Als Folgerung aus Theorem 5.1 erhalten wir

KOROLLAR 5.2.

(a) *Sind* $\alpha, \beta \in \Omega$ *und* $\alpha \in \beta$*, dann ist* $\alpha + 1 \subseteq \beta$*. Insbesondere ist* $\alpha + 1$ *die kleinste Ordinalzahl, welche* α *enthält.*

(b) *Für jede Ordinalzahl* $\alpha \in \Omega$ *haben wir entweder*

$$\alpha = \bigcup \alpha, \quad \text{in diesem Fall heisst } \alpha \textbf{ Limesordinalzahl},$$

oder

$$\exists \beta \in \Omega \, (\alpha = \beta + 1), \quad \text{in diesem Fall heisst } \alpha \textbf{ Nachfolgerordinalzahl}.$$

Beispiele.

- Die Elemente aus ω sowie ω selbst sind Ordinalzahlen.
- $\emptyset$ und ω sind Limesordinalzahlen, und alle Elemente $n \in \omega \setminus \{\emptyset\}$ sind Nachfolgerordinalzahlen.
- Weitere (abzählbare) Ordinalzahlen sind zum Beispiel

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega, \ldots, \omega \cdot \omega, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots, \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}, \ldots$$

- Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl wird mit ω_1 bezeichnet.

Mit dem Ersetzungsaxiom und dem Fundierungsaxiom lässt sich zeigen, dass jedes Modell $\mathbf{V}$ von ZF (oder ZFC) von folgender Struktur ist.

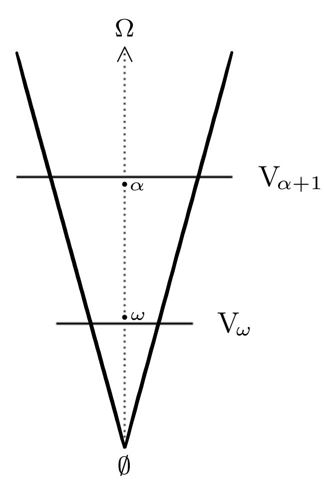
Zuerst definieren wir

$$\begin{array}{lll} \mathrm{V}_0 & := & \emptyset \\ \mathrm{V}_\alpha & := & \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathrm{V}_\beta \quad \text{für Limesordinalzahlen } \alpha \neq 0 \\ \mathrm{V}_{\alpha+1} & := & \mathscr{P}(\mathrm{V}_\alpha) \quad \text{für Nachfolgerordinalzahlen } \alpha + 1 \end{array}$$

und schliesslich definieren wir die Klasse $\mathbf{V}$ durch

$$\mathbf{V} := \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathrm{V}_\alpha,$$

d.h. für jede Menge $x \in \mathbf{V}$ exisitert eine Ordinalzahl α, sodass x ein Element der Menge V_α ist.



Die **kumulative Hierarchie** $\mathbf{V}$ ist die Klasse *aller* Mengen und ist ein Modell von ZF bzw. von ZFC. Insbesondere ist also jede Menge entweder die leere Menge oder sie ist eine Teilmenge einer α-fach iterierten Potenzmenge der leeren Menge für ein $\alpha \in \Omega$.

ÄQUIVALENTE FORMULIERUNGEN DES AUSWAHLAXIOMS

Eine auf den ersten Blick andere Aussage als das Auswahlaxiom ist das folgende

Wohlordnungsprinzip WOP. Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

Wir zeigen nun, dass das Auswahlaxiom und das Wohlordnungsprinzip äquivalent sind.

THEOREM 5.3. AC $\iff$ WOP

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei M eine Menge. Ist $M = \emptyset$, dann ist M bereits wohlgeordnet und wir sind fertig. Wir nehmen nun $M \neq \emptyset$ an und definieren $\mathscr{P}^*(M) := \mathscr{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$. Weiter sei, mit Annahme von AC, $f : \mathscr{P}^*(M) \to M$ eine beliebige aber feste Auswahlfunktion für $\mathscr{P}^*(M)$.

Eine injektive Funktion $w_\alpha : \alpha \hookrightarrow M$, wobei $\alpha \in \Omega$ eine Ordinalzahl ist, ist eine ***f*-Menge**, falls für alle $\gamma \in \alpha$ gilt:

$$w_\alpha(\gamma) = f\big(M \setminus \{w_\alpha(\delta) : \delta \in \gamma\}\big)$$

Zum Beispiel ist $w_1(0) = f(M)$ eine f-Menge – sogar die einzige f-Menge mit *Definitionsbereich* $\mathrm{dom}(w_1) = 1$. Für f-Mengen w_α und w_β definieren wir

$$w_\alpha \prec w_\beta :\iff \alpha \in \beta \wedge w_\beta|_\alpha = w_\alpha \qquad \text{wobei} \quad w_\beta|_\alpha := \big\{\langle \gamma, x\rangle \in w_\beta : \gamma \in \alpha\big\}.$$

BEHAUPTUNG: *Sind w_α und w_β f-Mengen, dann gilt $\alpha \in \beta \Rightarrow w_\alpha \prec w_\beta$.*

Beweis der Behauptung. Sei $\Gamma = \big\{\gamma \in \alpha : w_\beta|_\alpha(\gamma) \neq w_\alpha(\gamma)\big\} \subseteq \alpha$. Für einen Widerspruch nehmen wir $\Gamma \neq \emptyset$ an. Sei $\gamma_0 \in \alpha$ das $\in$-minimale Element von Γ. Es gilt dann $w_\beta|_\alpha(\gamma_0) \neq w_\alpha(\gamma_0)$ und für alle $\delta \in \gamma_0$ ist $w_\beta|_\alpha(\delta) = w_\alpha(\delta)$, d.h. $w_\beta|_{\gamma_0} = w_\alpha|_{\gamma_0}$.

Nun ist aber

$$w_\beta|_\alpha(\gamma_0) = f\big(M \setminus \{w_\beta|_\alpha(\delta) : \delta \in \gamma_0\}\big) = f\big(M \setminus \{w_\alpha(\delta) : \delta \in \gamma_0\}\big) = w_\alpha(\gamma_0)$$

d.h. $w_\beta|_\alpha(\gamma_0) = w_\alpha(\gamma_0)$, und unsere Annahme $\Gamma \neq \emptyset$ ist widerlegt. $\dashv_{\text{Beh.}}$

Weil die Funktionen $w_\alpha : \alpha \hookrightarrow M$ injektiv sind, folgt aus der Behauptung und dem Ersetzungsaxiom, dass

$$\Theta := \big\{\beta \in \Omega : \exists \alpha \in \Omega\, \exists x \in M\, \big(w_\alpha(\beta) = x\big)\big\}$$

eine Menge ist. Mit Theorem 5.1.(e) ist dann $\lambda := \bigcup \Theta \in \Omega$ (d.h. λ ist eine Ordinalzahl), und

$$\begin{array}{rccc} w_\lambda : & \lambda & \hookrightarrow & M \\ & \beta & \mapsto & w_{\beta+1}(\beta) \end{array}$$

ist eine f-Menge. Wäre w_λ nicht surjektiv, so könnten wir w_λ erweitern zur f-Menge

$$w_{\lambda+1} := w_\lambda \cup \Big\{\big\langle \lambda,\ f\big(M \setminus \{w_\lambda(\delta) : \delta \in \lambda\}\big)\big\rangle\Big\}$$

und hätten $\lambda \in \Theta$, also $\lambda \in \lambda$, was aber Thm. 5.1.(a) widerspricht. Die Funktion $w_\lambda : \lambda \to M$ ist somit injektiv und surjektiv, also bijektiv, und die Menge M wird durch w_λ wohlgeordnet.

($\Leftarrow$) Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen und sei $<$ eine Wohlordnung auf $\bigcup \mathscr{F}$. Definiere $f : \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F}$ durch "$f(x)$ ist das $<$-minimale Element von x". Dann ist f eine Auswahlfunktion von $\mathscr{F}$. $\dashv$

Der Beweis von Theorem 5.3 gibt uns etwas mehr als nur eine Wohlordnung auf M, nämlich eine *Bijektion* zwischen einer Ordinalzahl α und der Menge M. Mit dieser Bijektion (und den Eigenschaften von Ordinalzahlen) können wir viele Beweise, in denen das Auswahlaxiom verwendet wird, dadurch vereinfachen, dass wir eine Art "Induktion" ausführen:

Transfinite Induktion. Sei M eine Menge, $\lambda \in \Omega$ eine Ordinalzahl und $\iota : \lambda \to M$ eine Bijektion. Mit Hilfe von ι können wir M schreiben als $M = \{a_\beta : \beta \in \lambda\}$.

Sei $f : \lambda \times \mathscr{P}(M) \to M$ eine Funktion. Mit Induktion über λ definieren wir nun für alle $\beta \in \lambda$ die Mengen $A_\beta \subseteq M$ wie folgt:

$$A_\beta := \begin{cases} \emptyset & \text{für } \beta = 0, \\ A_\delta \cup f(\delta, A_\delta) & \text{für } \beta = \delta + 1, \\ \bigcup_{\delta \in \beta} A_\delta & \text{für Limesordinalzahlen } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist $A_\lambda := \bigcup_{\beta \in \lambda} A_\beta \subseteq M$.

Beispiel: Jeder Vektorraum V hat eine Basis.

Sei $V = \{v_\beta : \beta \in \lambda\}$ für ein $\lambda \in \Omega$. Für $A \subseteq V$ und $\delta \in \lambda$ definieren wir

$$f(\delta, A) := \begin{cases} A & \text{falls die Vektoren } A \cup \{v_\delta\} \text{ linear abhängig sind,} \\ A \cup \{v_\delta\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die entsprechende Menge $A_\lambda \subseteq V$ eine Basis von V: Wären die Vektoren aus A_λ linear abhängig, so gäbe es eine kleinste Ordinalzahl $\delta \in \lambda$, sodass A_δ linear unabhängig und $A_\delta \cup \{v_\delta\}$ linear abhängig ist, das widerspricht aber der Definition von $f(\delta, A_\delta)$. Wären umgekehrt die Vektoren aus A_λ kein Erzeugendensystem, so gäbe es eine kleinste Ordinalzahl $\delta \in \lambda$, sodass $v_\delta \notin A_\lambda$ und $A_\lambda \cup \{v_\delta\}$ linear unabhängig ist. Insbesondere ist dann auch $A_\delta \cup \{v_\delta\}$ linear unabhängig, und nach Definition von $f(\delta, A_\delta)$ ist dann aber $v_\delta \in A_{\delta+1} \subseteq A_\lambda$

Bevor wir ein weiteres zu AC äquivalentes Auswahlprinzip formulieren, führen wir zuerst die Begriffe *Partialordnung* und *Kette* ein: Eine Menge P zusammen mit einer binäre Relation $\leq$ ist eine **Partialordnung**, falls die Relation $\leq$ reflexiv ($x \leq x$), anti-symmetrisch (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$), und transitiv (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$) ist. Eine Teilmenge $C \subseteq P$ einer Partialordnung $(P, \leq)$ ist eine **Kette**, falls C durch $\leq$ linear geordnet wird.

Kuratowski-Zorn Lemma KZL. Ist $(P, \leq)$ eine nicht-leere Partialordnung, sodass jede Kette $C \subseteq P$ eine obere Schranke hat, so hat P ein maximales Element.

Für das nächste zu AC äquivalente Auswahlprinzip brauchen wir den Begriff *endlichen Charakter*: Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat **endlichen Charakter**, falls für jede Menge $x \in \mathscr{F}$ gilt, x ist in $\mathscr{F}$ genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von x in $\mathscr{F}$ ist.

Teichmüller-Prinzip TP. Ist $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter, so hat $\mathscr{F}$ ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.

THEOREM 5.4. *Die folgenden Prinzipien sind äquivalent zum Auswahlaxiom* AC.

(a) *Wohlordnungsprinzip* WOP
(b) *Kuratowski-Zorn Lemma* KZL
(c) *Teichmüller-Prinzip* TP

Beweis. Wir wissen bereits, dass gilt $\mathsf{AC} \Leftrightarrow \mathsf{WOP}$.

$\mathsf{WOP} \Rightarrow \mathsf{KZL}$: Der Beweis erfolgt mittels transfiniter Induktion. Sei $(P, \leq)$ eine nicht-leere Partialordnung und sei $P = \{p_\beta : \beta \in \lambda\}$ für eine Ordinalzahl $\lambda \in \Omega$. Für $A \subseteq P$ und $\delta \in \lambda$ definieren wir

$$f(\delta, A) := \begin{cases} A & \text{falls } A \text{ keine Kette ist,} \\ A \cup \{p_\delta\} & \text{falls } p_\delta \text{ eine obere Schranke der Kette } A \text{ ist.} \end{cases}$$

Dann ist die entsprechende Menge $A_\lambda \subseteq P$ eine Kette in P und jede obere Schranke von A_λ ist ein maximales Element von P.

$\mathsf{KZL} \Rightarrow \mathsf{TP}$: Sei $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter. Dann ist $(\mathscr{F}, \subseteq)$ eine nicht-leere Partialordnung und jede Kette $C \subseteq P$ hat eine obere Schranke $\bigcup C$. Weil $\mathscr{F}$ endlichen Charakter hat, gehört, für Ketten C, jede endliche Teilmenge von $\bigcup C$ zu $\mathscr{F}$, und deshalb $\bigcup C \in \mathscr{F}$. Mit KZL hat somit $\mathscr{F}$ ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.

$\mathsf{TP} \Rightarrow \mathsf{AC}$: Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen. Wir müssen eine Auswahlfunktion für $\mathscr{F}$ finden. Dazu bilden wir die Menge

$$\mathscr{E} = \Big\{ f \in {}^{\mathscr{G}}\bigcup \mathscr{G} : f \text{ ist eine Auswahlfunktion für eine Teilfamilie } \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F} \Big\}.$$

Eine Funktion $f : \mathscr{G} \to \bigcup \mathscr{G}$ ist eine Auswahlfunktion für $\mathscr{G}$ genau dann, wenn jede endliche Teilfunktion von f (d.h. $f|_{\mathscr{G}'}$ für endliche Teilmengen $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$), eine Auswahlfunktion ist. Die Familie $\mathscr{E}$ hat somit endlichen Charakter und mit TP hat $\mathscr{E}$ ein maximales Element f_0. Weil f_0 maximal ist, muss gelten $\mathrm{dom}(f_0) = \mathscr{F}$ und somit ist f_0 eine Auswahlfunktion für $\mathscr{F}$. $\dashv$

ABGESCHWÄCHTE FORMEN DES AUSWAHLAXIOMS

Vielfach wird in Beweisen nicht das volle Auswahlaxiom gebraucht, sondern nur eine abgeschwächte Form davon. Ein paar solcher abgeschwächten Formen des Auswahlaxioms seien hier aufgelistet.

- $\mathsf{C}(\omega, \infty)$: Jede abzählbare Familie nicht-leerer Mengen hat eine Auswahlfunktion.
- $\mathsf{C}(\omega, \omega)$: Jede abzählbare Familie nicht-leerer abzählbarer Mengen hat eine Auswahlfunktion.
- $\mathsf{C}(\omega, < \omega)$: Jede abzählbare Familie nicht-leerer endlicher Mengen hat eine Auswahlfunktion.
- $\mathsf{C}(\omega, n)$: Jede abzählbare Familie n-elementiger Mengen (für $n \in \omega$, $n \geq 1$) hat eine Auswahlfunktion.
- $\mathsf{C}(\infty, n)$: Jede Familie n-elementiger Mengen (für $n \in \omega$, $n \geq 1$) hat eine Auswahlfunktion.
- $\mathsf{C}(\infty, < \omega)$: Jede Familie nicht-leerer endlicher Mengen hat eine Auswahlfunktion.

In dieser Notation ist $\mathsf{C}(\infty, \infty)$ das volle Auswahlaxiom. In ZF lässt sich zum Beispiel die Implikation $\mathsf{C}(\infty, 2) \Rightarrow \mathsf{C}(\infty, n)$ für $n \in \{1, 2, 4\}$ beweisen, oder auch $\mathsf{C}(\infty, < \omega) \Rightarrow \mathsf{C}(\infty, n)$ für alle $n \in \omega$ mit $n \geq 1$. Andererseits lassen sich in ZF zum Beispiel die Implikationen $\big(\mathsf{C}(\infty, n)$ für alle $n \in \omega \setminus \{0\}\big) \Rightarrow \mathsf{C}(\infty, < \omega)$ oder $\mathsf{C}(\infty, 2) \Rightarrow \mathsf{C}(\infty, 3)$ nicht zeigen.