

## Zwischenprüfung März 2021

**3. März 2021 – 19:00-20:00 – 60 Minuten**

---

1. Welche der folgenden vier Aussagen ist wahr?

- (a) Das Produkt von zwei zyklischen Gruppen ist immer eine zyklische Gruppe.
  - (b) Das Produkt von zwei zyklischen Gruppen der Ordnung  $\geq 2$  ist nie eine zyklische Gruppe.
  - ✓ (c) Zyklische Gruppen der Ordnung  $p$  für  $p$  prim sind immer einfach.
  - (d) Zyklische Gruppen der Ordnung  $\geq 2$  sind nie einfach.
- 

2. Seien  $G, H$  zwei Gruppen und sei  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Welche der folgenden drei Aussagen sind falsch?

- (1) Ist  $N \trianglelefteq G$ , dann ist  $\varphi(N) \trianglelefteq \varphi(G)$ .
  - (2) Ist  $N \trianglelefteq H$ , dann ist  $\varphi^{-1}(N) \trianglelefteq G$ .
  - (3) Ist  $N \trianglelefteq G$ , dann ist  $\varphi(N) \trianglelefteq H$ .
- 
- ✓ (a) Nur (3) ist falsch.
  - (b) Nur (2) ist falsch.
  - (c) (1) und (3) sind falsch.
  - (d) Keine der drei Aussagen ist falsch.
- 

3. Die Gruppe

$$C_{180} \times C_{150} \times C_{70} \times C_{36} \times C_{12}$$

ist isomorph zur Gruppe:

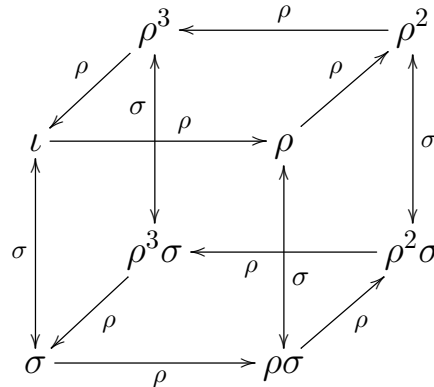
- (a)  $C_{1260} \times C_{180} \times C_{60} \times C_{30} \times C_2$
- (b)  $C_{6300} \times C_{180} \times C_{60} \times C_6 \times C_2$
- (c)  $C_{2100} \times C_{540} \times C_{60} \times C_6 \times C_2$
- (d)  $C_{6300} \times C_{60} \times C_{60} \times C_6 \times C_6$

---

4. Wieviele Elemente hat die Automorphismengruppe  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ ?

- (a) 14 (c) 12  
 (b) 15  (d) 8
- 

5.



Die obige Figur zeigt den Cayley-Graphen der Gruppe:

- (a)  $S_4$  (c)  $D_4$   
 (b)  $C_2 \times C_4$  (d)  $C_8$
- 

6. Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 28 und sei  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$  der Ordnung 7. Welche der folgenden drei Aussagen ist falsch?

- (1)  $H$  ist abelsch.  
 (2)  $H \trianglelefteq G$ .  
 (3)  $G$  ist auflösbar.
- (a) Keine der drei Aussagen ist falsch. (c) Nur (2) ist falsch.  
 (b) Nur (1) ist falsch. (d) Nur (3) ist falsch.
- 

7. Die Gruppe

$$H = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

ist eine Untergruppe von  $S_4$ .

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a)  $H \cong C_2 \times C_2$  (c)  $H$  ist abelsch.  
(b)  $H \trianglelefteq S_4$  ✓ (d)  $|H| = 8$
- 

8. Sei  $G$  eine abelsche Gruppe der Ordnung 24.  
Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a)  $G$  hat einen Normalteiler der Ordnung 6.  
(b)  $G$  ist auflösbar.  
✓ (c)  $|\text{Syl}_2(G)| = 3$   
(d)  $G$  hat eine zyklische Untergruppe der Ordnung 6.
- 

9. Sei  $R$  der Ring  $\mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/59\mathbb{Z}$ .

Das multiplikativ Inverse von  $(\bar{13}, \bar{13})$  in  $R$  ist:

- (a)  $(\bar{43}, \bar{50})$  ✓ (c)  $(\bar{13}, \bar{50})$   
(b)  $(\bar{13}, \bar{37})$  (d)  $(\bar{43}, \bar{37})$
- 

10. Ein ggT von

$$X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 4 \quad \text{und} \quad X^3 - 3X^2 + 6X - 8$$

in  $\mathbb{Q}[X]$  ist:

- ✓ (a)  $X^2 - X + 4$  (c)  $X + 2$   
(b)  $\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}$  (d) 1
-

11. Für das Polynom

$$q = 30 + 60 X^7 + 180 X^9 + 225 X^{23}$$

gilt:

- (a)  $q$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Z}[X]$  aber reduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$ .
  - (b)  $q$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Z}[X]$  und irreduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$ .
  - ✓ (c)  $q$  ist reduzibel in  $\mathbb{Z}[X]$  aber irreduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$ .
  - (d)  $q$  ist reduzibel in  $\mathbb{Z}[X]$  und reduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$ .
- 

12. Welche der folgenden drei Aussagen ist falsch?

- (1) Es existiert eine zyklische Untergruppe  $H \leq S_8$  der Ordnung 15.
  - (2) Sei  $p$  prim mit  $3 \mid (p - 1)$ , sei  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  mit  $\text{ord}(a) = p - 1$ , und sei  $x := a^{\frac{p-1}{3}}$ .  
Dann ist  $x^2 + x + \bar{1} = \bar{1}$ .
  - (3) Ist  $R$  ein Integritätsring und  $R[X]$  ein Hauptidealring, so ist  $R$  ein Körper.
- 
- (a) (1) ist falsch
  - (b) (2) ist falsch
  - (c) (3) ist falsch
  - (d) Keine der drei Aussagen ist falsch.
-