Kurzlösungen zur Probeprüfung

13. (a) Ist f reduzibel, so lässt sich ein Linearfaktor abspalten;
[3] es gilt aber $f(a) \neq 0$ für alle $a \in \mathbb{F}_7$. Somit ist f irreduzibel.

(b) Sei $K := \mathbb{F}_7[X]/(f)$. Dann ist K ein Körper
[2] und $|K^*| = 7^3 - 1 = 342$.

$$\bar{g}^{344} = \bar{g}^2 = \overline{g^2} = \overline{X^2 + 3X + 2}$$

(c) Wie in Aufgabe 97 (Serie 17): $(\overline{X^2})^{-1} = \overline{X^2 + 6X + 1}$
[3] bzw. $X^2 + 6X + 1 \pmod f$

14. (a) Wie Proposition 11.1 (Skript p. 74). [2]
(b) Wie Proposition 11.3 (Skript p. 75). [2]
(c) Wie Lemma 13.1 (a) (Skript p. 89). [2]
(d) Bemerkung (1) (Skript p. 90); für "2 irreduzibel" betrachte $|z|$ in $\mathbb{C}$. [2]

15. (a) (i) $\pi(xy)(H) = \pi_{xy}(H) = \ldots = \pi_x(\pi_y(H)) = \ldots$ [1]
(ii) Theorem 4.3 (Skript p. 39) [1]
(iii) $|G| = 36$, $|Syl_3(G)| \in \{1, 4\}$ [2]
Normalteiler ✓

- Sei $|Syl_3(G)| = 4$ und H_0 eine 3-Syl.-UG von G.
- $|\mathcal{H}| = 4$ und $S(\mathcal{H}) \cong S_4$ mit $|S_4| = 24$.
- Sei $\varphi: G \to S(\mathcal{H})$ wie in (i); weil $|G| = 36 > 24 = |S(\mathcal{H})|$

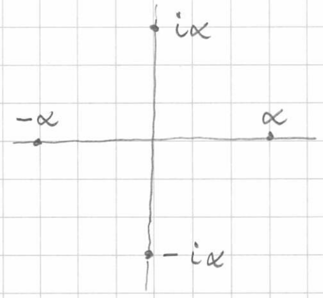
folgt, dass $\ker(\varphi)$ ein nicht-trivialer Normalteiler von G ist.

(b) $|G| = 28$; $|Syl_7(G)| = 1$, also ex. $N \trianglelefteq G$ mit $N \cong C_7$. $G/N \cong C_4$ / $C_2 \times C_2$; $C_7, C_4, C_2 \times C_2$ sind abelsch.
[4]

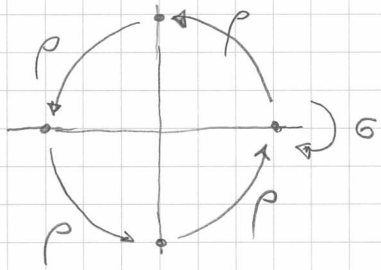
16. $f = X^4 - 3$

(a) Nullstellen:

$\alpha := \sqrt[4]{3}$

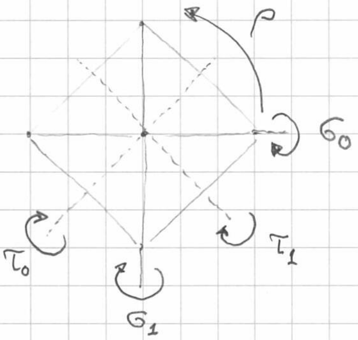


$L_f = \mathbb{Q}(\alpha, i)$; $\rho: \begin{array}{l} i \mapsto i \\ \alpha \mapsto i\alpha \end{array}$, $\sigma: \begin{array}{l} i \mapsto -i \\ \alpha \mapsto \alpha \end{array}$



Also ist $Gal(f) \cong D_4$, erzeugt von ρ und σ. [4]

(b)



$D_4 = \{ \iota, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1 \}$

D_4 hat 5 Untergruppen der Ordnung 2:

$\langle \rho^2 \rangle$, $\langle \sigma_0 \rangle$, $\langle \sigma_1 \rangle$, $\langle \tau_0 \rangle$, $\langle \tau_1 \rangle$

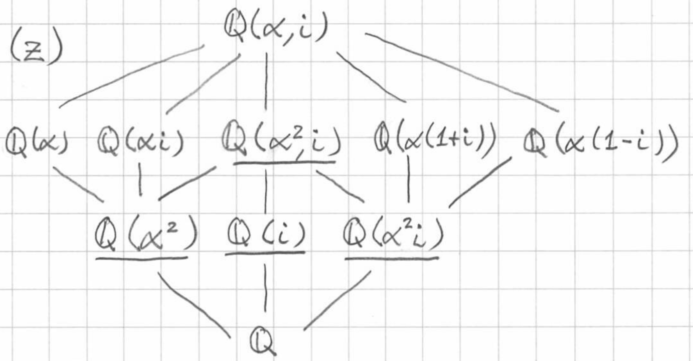
Normalteiler

D_4 hat 3 Untergruppen der Ordnung 4:

$\langle \rho \rangle$, $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$, $\langle \tau_0, \tau_1 \rangle$

alles Normalteiler, weil Index $= \frac{8}{4} = 2$. [4]

(c)



[2]

17. $C_2 \times C_2$ ist abelsch und hat 3 Untergruppen die isom. zu C_2 sind; d.h. $G_i \trianglelefteq C_2 \times C_2$ und $M_i : \mathbb{Q}$ ist normal. $Gal(L : M_i) \cong C_2$ und für $M_1 = \mathbb{Q}(\alpha)$ und $M_3 = \mathbb{Q}(\beta)$ ist $M_2 = \mathbb{Q}(\alpha + \beta)$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. [8]

$X^2 + a_1 X + a_0$ mit $a = a_1^2 - 4a_0$ und $\alpha = \sqrt{a}$