Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Algebra I/II

150 Minuten

Die Prüfung besteht aus 12 MC-Aufgaben (1–12) zu je 2 Punkten und aus 5 offenen Fragen (13–17) zu je 8 Punkten (mit 2 Zusatzpunkten für Aufgabe 16.(z)). Bei den MC-Aufgaben ist jeweils eine Antwort richtig. Die 12 MC-Aufgaben werden in einem ähnlichen Stil sein wie die MC-Aufgaben der Zwischenprüfung (aber natürlich auch Fragen zu Algebra II beinhalten), und die 5 offenen Fragen werden ähnlich sein wie die folgenden Aufgaben.

---

13. Sei $f = X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_7[X]$.

(a) Zeige, dass f irreduzibel ist über $\mathbb{F}_7$.

(b) Sei $g = 2X^2 + 3$.
Berechne $\bar{g}^{344}$ in $\mathbb{F}_7[X]/(f)$.

(c) Berechne $(\overline{X^2})^{-1}$ in $\mathbb{F}_7[X]/(f)$.

---

14. Sei R ein nicht-trivialer kommutativer Ring. Ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ heisst *Primideal*, falls $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist. Ein Element $p \in R$ heisst *Primelement*, falls $p \neq 0$, $p \notin R^*$ und für $a, b \in R$ folgt aus $p \mid ab$, $p \mid a$ oder $p \mid b$.

(a) Zeige, ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ ist genau dann Primideal, wenn $\mathfrak{p} \neq R$ und für alle $a, b \in R$ gilt

$$a \cdot b \in \mathfrak{p} \to a \in \mathfrak{p} \vee b \in \mathfrak{p}.$$

(b) Seien R, S nicht-triviale kommutative Ringe, sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und sei $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal in S.
Zeige, dass dann $\varphi^{-1}[\mathfrak{p}] \subseteq R$ ein Primideal in R ist.

(c) Zeige, dass in einem Integritätsring Primelemente irreduzibel sind.

(d) Zeige, dass $R = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subseteq \mathbb{C}$ ein Integritätsring ist, dass $2 \in R$ irreduzibel ist, und dass 2 kein Primelement in R ist.

---

15. Die folgenden beiden Teilaufgaben (a) und (b) sind unabhängig von einander.

(a) Sei G eine Gruppe, sei $H_0 \leqslant G$ eine Untergruppe von G und sei

$$\mathscr{H} := \left\{ xH_0x^{-1} : x \in G \right\}.$$

Weiter sei $S(\mathscr{H})$ die Symmetriegruppe von $\mathscr{H}$, *d.h.* die Gruppe aller Permutationen von $\mathscr{H}$.

(i) Zeige, dass die Abbildung φ, definiert durch

$$\begin{array}{rccccc} \varphi : & G & \to & S(\mathscr{H}) & & \\ & x & \mapsto & \pi_x : & \mathscr{H} & \to & \mathscr{H} \\ & & & & H & \mapsto & xHx^{-1} \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(ii) Zeige allgemein, dass der Kern eines Gruppenhomomorphismus $\psi : G \to K$ ein Normalteiler von G ist.

(iii) Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 36 nie einfach ist.

(b) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 28 auflösbar ist.

Bemerkung: Es darf verwendet werden, dass für $N \trianglelefteq G$, aus der Auflösbarkeit von N und G/N die Auflösbarkeit von G folgt.

---

16. Sei $f = X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Bestimme die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(f)$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimme alle nicht-trivialen Untergruppen von $\operatorname{Gal}(f)$ und entscheide jeweils, ob sie Normalteiler von $\operatorname{Gal}(f)$ sind.

(z) Sei L_f der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

Bestimme alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$ der Körpererweiterung $L_f : \mathbb{Q}$.

---

17. Sei $L : \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung mit $[L : \mathbb{Q}] = 4$ und $\operatorname{Gal}(L : \mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2$.
Zeige, dass dann $a, b \in \mathbb{Q}$ existieren, sodass gilt $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.
