Prüfung 2022

Multiple-Choice Aufgaben

---

1. Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$ eine Untergruppe von G. Welche der folgenden vier Aussagen sind falsch?

(1) Für alle $x \in G$ gilt $xH = \{y \in G : x^{-1}y \in H\}$.

(2) $\{y \in G : yHy^{-1} = H\} \leqslant G$

(3) $H \trianglelefteq \{y \in G : yHy^{-1} = H\}$

(4) $H \leqslant \{y \in G : \forall x \in H\,(yx = yx)\}$

√ (a) Nur (4) ist falsch.

(b) (2) und (3) sind falsch.

√ (c) Nur (3) ist falsch.

√ (d) Nur (1) ist falsch.

---

2. Es sei

$$C_{30} \times C_{300} \times C_{300} \times C_{900} \times C_{88} \times C_8 \cong C_{n_1} \times C_{n_2} \times \cdots \times C_{n_k}$$

mit $n_i \geq 2$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $n_i \mid n_{i+1}$ für alle $1 \leq i < k$.

Dann ist die Folge $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ der n_i gleich:

√ (a) $\langle 2, 4, 60, 300, 600, 19\,800 \rangle$

(b) $\langle 2, 4, 60, 300, 300, 39\,600 \rangle$

(c) $\langle 2, 2, 2, 30, 600, 600, 19\,800 \rangle$

(d) $\langle 2, 120, 600, 600, 19\,800 \rangle$

---

3. Welche der folgenden Aussage ist falsch?

√ (a) $3^{120} \equiv 3 \pmod{31}$

(b) Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ ist zyklisch.

(c) $7^{120} \equiv 1 \pmod{15}$

(d) Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ ist zyklisch.

---

4. Welche der folgenden vier Aussagen sind richtig?

(1) Gruppen der Ordnung 15 sind immer abelsch.

(2) Gruppen der Ordnung 15 sind immer zyklisch.

(3) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 15.

(4) Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 15.

√ (a) (1) und (2) sind richtig.

(b) Nur (1) ist richtig.

(c) Nur (3) ist richtig.

(d) Nur (4) ist richtig.

---

5. Welche der folgenden drei Aussagen ist falsch?

(1) Ein Hauptidealring ist immer ein Integritätsring.

(2) Ist R ein Integritätsring, so ist auch $R[X, Y]$ ein Integritätsring.

(3) $\mathbb{Z}[X]$ ist euklidisch.

√ (a) (3) ist falsch.

(b) (2) ist falsch.

(c) (1) ist falsch.

(d) Keine der drei Aussagen ist falsch.

---

6. Welche der folgenden vier Aussagen ist falsch?

√ (a) $\mathbb{Z}[X]$ ist ein Hauptidealring.

(b) Jeder Hauptidealring ist faktoriell.

(c) Ist $\mathbb{F}$ ein Körper, so ist $\mathbb{F}[X]$ faktoriell.

(d) Ist $\mathbb{F}$ ein Körper, so ist $\mathbb{F}[X]$ ein Hauptidealring.

---

7. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

(A) $\mathbb{F}_{29}^*$ hat 28 Elemente und ist zyklisch.

(B) Ist $f \in \mathbb{F}_{31}[X]$ ein irreduzibles Polynom über dem Körper $\mathbb{F}_{31}$ mit $\deg(f) = 31$, so ist $\mathbb{F}_{31}[X]/(f)$ ein Körper mit 31^{30} Elementen.

(C) Für $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 2 \in \mathbb{F}_7[X]$ ist $\mathbb{F}_7[X]/(f)$ ein Körper.

(D) Für $g = X^3 + 2X^2 + 4X + 2 \in \mathbb{F}_5[X]$ ist $\mathbb{F}_5[X]/(g)$ ein Körper mit 125 Elementen.

√ (a) (B), (C)

(b) (C), (D)

(c) (A), (C)

(d) (A), (B)

---

8. Das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{7}i$ über $\mathbb{Q}$ ist:

√ (a) $X^4 + 28$

(b) $X^4 - 28$

(c) $X^4 + 7$

(d) $X^4 - 7$

---

9. Welche der folgenden vier Aussagen ist falsch?

√ (a) Ist eine Körpererweiterung algebraisch, so wird sie von endlich vielen Elementen erzeugt.

(b) Ist $L : K$ eine endliche separable Körpererweiterung, so ist $L : K$ einfach.

(c) Seien $M : L$ und $L : K$ Körpererweiterungen. Dann ist $M : K$ genau dann algebraisch, wenn $M : L$ und $L : K$ algebraisch sind.

(d) Ist $L : K$ eine einfache Körpererweiterung, so ist $L : K$ entweder endlich oder transzendent.

---

10. Ist p eine Primzahl, dann ist $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{p}) : \mathbb{Q}\big)$ isomorph zu:

√ (a) $\{\iota\}$, die triviale Gruppe

(b) C_4

(c) C_5

(d) C_{p-1}

---

11. Sei L der Zerfällungskörper von $X^4 - 9$ über $\mathbb{Q}$. Dann sind die Zwischenkörper M mit $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L$:

√ (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$, $\mathbb{Q}(i)$

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}i)$, $\mathbb{Q}(i)$

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i)$

(d) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$, $\mathbb{Q}(i)$

---

12. Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 4, sei L_f der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$, und sei $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q}) \cong S_4$.

Welche der folgenden vier Aussagen ist falsch?

√ (a) Es existiert ein Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$ mit $\mathrm{Gal}(M : \mathbb{Q}) \cong A_4$ und $M : \mathbb{Q}$ ist normal.

(b) Es existiert ein Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$ mit $\mathrm{Gal}(L_f : M) \cong A_4$.

(c) Es existiert ein Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$ mit $\mathrm{Gal}(M : \mathbb{Q}) \cong C_2$ und $\mathrm{Gal}(L_f : M) \cong A_4$.

(d) Es existiert ein Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$ mit $\mathrm{Gal}(L_f : M) \cong C_2 \times C_2$ und $M : \mathbb{Q}$ ist normal.

Algebra I/II

150 Minuten

Die Prüfung besteht aus 12 MC-Aufgaben (1–12) zu je 2 Punkten und aus 5 offenen Fragen (13–17) zu je 8 Punkten (mit 2 Zusatzpunkten für Aufgabe 16.(z)).

---

13. Berechne die kleinste positive, ganze Zahl n für die gilt:

$$\begin{aligned} n &\equiv 5 \pmod{7} \\ n &\equiv 3 \pmod{10} \\ n &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

---

14. Sei R ein nicht-trivialer kommutativer Ring. Ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ heisst *Primideal*, falls $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist. Ein Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ heisst *maximal*, falls $\mathfrak{m} \neq R$ und es kein Ideal $\mathfrak{a} \neq R$ gibt mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a}$.

(a) Zeige:

$$\mathfrak{m} \text{ ist ein maximales Ideal in } R \iff R/\mathfrak{m} \text{ ist ein Körper}$$

(b) Bestimme die maximalen Ideale im Ring $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$.

(c) Zeige, dass jedes maximale Ideal in R ein Primideal ist.

(d) Zeige, dass für $R = \mathbb{Z}$ jedes Primideal in $\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal ist.

15.

(a) Bestimme bis auf Isomorphie alle *abelschen* Gruppen der Ordnung 32.

(b) Bestimme bis auf Isomorphie *alle* Gruppen der Ordnung 21.

---

16. Sei $f = X^7 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Bestimme die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f)$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Sei L_f der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.
Bestimme alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$ der Körpererweiterung $L_f : \mathbb{Q}$.

(z) Bestimme das Minimalpolynom von $2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{7})$ über $\mathbb{Q}$.

---

17. Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die n paarweise verschiedenen Nullstellen von f im Zerfällungskörper L_f von f über $\mathbb{Q}$. Weiter sei

$$\mathit{\Delta} := \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j) \qquad \text{und} \qquad \mathit{\Delta}^2 := \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

(a) Zeige, dass für jedes Element (bzw. Permutation) $\sigma \in \mathrm{Gal}(f)$ gilt:

$$\begin{array}{lll} \sigma \text{ ist gerade} & \iff & \sigma(\mathit{\Delta}) = \mathit{\Delta} \\ \sigma \text{ ist ungerade} & \iff & \sigma(\mathit{\Delta}) = -\mathit{\Delta} \end{array}$$

(b) Zeige, dass gilt $\mathit{\Delta}^2 \in \mathbb{Q}$.

(c) Zeige, dass gilt:

$$\mathit{\Delta} \in \mathbb{Q} \iff \mathrm{Gal}(f) \leqslant A_n$$

Bemerkung: Die verwendeten Sätze, wie zum Beispiel $L_f^{\mathrm{Gal}(f)} = \mathbb{Q}$, sollten richtig zitiert werden, müssen aber nicht bewiesen werden.
