1) a) Sei A eine fixe Teilmenge von X. Bestimme die von $\{A\}$ erzeugte σ-Algebra von Teilmengen von X.

   b) Sei X überabzählbar. Sei
$$\mathcal{S} = \{E \subset X : E \text{ oder } E^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$
   Zeige, dass $\mathcal{S}$ die von den einpunktigen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra ist.

2) Es seien X und Y Mengen und $f \colon X \to Y$ sei eine Abbildung.

   a) Wenn $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, zeige, dass
$$\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\}$$
   eine σ-Algebra auf X ist.

   b) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, zeige, dass
$$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$
   eine σ-Algebra auf Y ist.

3) Zeigen Sie, dass jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ als eine höchstens abzählbare Vereinigung von Quadern
$$Q(a,b) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n), \ \middle| \, a_i < x_i < b_i, \, \forall i = 1, \ldots, n\right\},$$
mit $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, geschrieben werden kann.

4) Betrachte die Menge
$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$
und definiere für $a, b \in \mathbb{R}$:
$$(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\}, \ [-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}.$$
Eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ heisst **offen**, falls U als eine abzählbare Vereinigung von Intervallen der Form (c, d), $(a, \infty]$, $[-\infty, b)$ mit a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller offenen U (wie oben definiert) eine Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert. Wir nennen diese Topologie die **Standardtopologie** auf $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Metrik $d\colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ die Standardtopologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ induziert: Für x, $y \in \mathbb{R}$ definiere

$$\begin{aligned} d(x,y) &:= \frac{2|e^{x-y} - e^{y-x}|}{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}} \\ d(x,\infty) := d(\infty,x) &:= \frac{2e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \\ d(x,-\infty) := d(-\infty,x) &:= \frac{2e^{x}}{e^{x} + e^{-x}} \\ d(-\infty,\infty) := d(\infty,-\infty) &:= 2. \end{aligned}$$

5) Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heisst **unterhalbstetig** (oder nach unten halb-stetig), falls für alle Punkte $x \in X$ und alle Folgen $(x_k)_{k\geq 1} \subset X$ mit $x_k \to x$ für $k \to +\infty$ gilt

$$f(x) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(x_k).$$

Zeige: eine solche Funktion f ist Borel-messbar.