1) Sei $F \subset [0,1]$ eine abgeschlossene Menge und $\delta_F(z) = \inf\{|y-z| \,:\, y \in F\}$.

   a) Zeige mit Fubini, dass

   $$\int_0^1 \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\,dz < +\infty$$

   für alle $\lambda > 0$ und fast jedes $x \in F$.

   Hinweis. Zeige, dass $\delta_F(x) = 0$ äquivalent ist zu $x \in F$, falls F abgeschlossen ist.

   b) Sei $F \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $f \geq 0$ Lebesgue integrierbar auf dem Komplement von F. Zeige: Für jedes $\lambda > 0$ ist die Funktion

   $$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}} f(z)\,dz$$

   Lebesgue integrierbar auf F.

2) Betrache $I = [0,1]$ und den Lebesgue Massraum $(I^3, \mathcal{A}, m)$. Sei

   $$f \colon I^3 \to [0,\infty],\ f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}}, & \text{falls } y \neq z, \\ \infty, & \text{falls } y = z. \end{cases}$$

   Zeige, dass $f \in \mathcal{L}^1(m)$ gilt.

3) *Erinnerung Analysis:*

   Zeige die **Youngsche Ungleichung**:

   Seien a, $b \geq 0$ und $1 < p$, $q < \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   Dann gilt:

   $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

   Hinweis: Verwende, dass die Exponentialfunktion konvex ist.

4) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(X) = 1$, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige:

   Jensen's Ungleichung:

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \phi \circ f d\mu.$$

   Gehe dabei wie folgt vor:

   a) Zeige, dass $\phi^- \circ f$ integrierbar ist, so dass die rechte Seite

$$\int_X \phi \circ f d\mu := \int_X \phi^+ \circ f \, d\mu - \int_X \phi^- \circ f \, d\mu \in (-\infty, \infty]$$

   wohldefiniert ist, auch wenn möglicherweise $\int_X \phi^+ \circ f d\mu = \infty$ gilt.

   b) Zeige: Ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere konvexe Funktion mit

$$\psi(x) \leq \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

   so gilt

$$\int_X \psi \circ f \, d\mu \leq \int_X \phi \circ f \, d\mu,$$

   wobei die Integrale jeweils wie in a) definiert sind.

   c) Zeige die Ungleichung von Jensen.

   Bemerkung: Man darf ohne Beweis die folgenden Eigenschaften von konvexen Funktionen $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der Analysis verwenden:

   i) ϕ ist stetig,

   ii) Zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es a, $b \in \mathbb{R}$, so dass $\phi(x) \geq ax+b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ und $\phi(x_0) = ax_0 + b$ gilt.

   Für c) wähle $x_0 = \int_X f \, d\mu$ und verwende b).

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, p, q, $r \in [1, \infty]$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$.

   a) Zeige, dass unter der Annahme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

das Produkt $f \cdot g$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegt und die folgende Ungleichung gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Hinweis: Theorem 4.1 kann weiterhelfen.[1]

b) Verwende a) um zu zeigen, dass für

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

gilt:

$$f \cdot g \in \mathcal{L}^r(\mu) \text{ mit } \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

[1] Es folgt *nicht* sofort aus Theorem 4.1! Was ist der Unterschied?