D-MATH | **Mass und Integral** | **ETH Zürich**

Prof. Thomas Willwacher | Serie 11 | FS 2022

1) Finde jeweils einen Massraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, sodass für alle $p, q \in [1, \infty]$ gilt

   a) $L^p(\mu) \subsetneq L^q(\mu)$, falls $p < q$,

   b) $L^p(\mu) \subsetneq L^q(\mu)$ falls $q < p$,

   c) $L^p(\mu) \nsubseteq L^q(\mu)$ und $L^q(\mu) \nsubseteq L^p(\mu)$, falls $p \neq q$.

2) Es sei μ ein Mass auf einem Massraum Ω. Wir sagen eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von reellen messbaren Funktionen auf Ω konvergiere *im Mass* gegen die reelle messbare Funktion f, falls für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \epsilon\right\}\right) \to 0 \text{ mit } n \to +\infty.$$

   Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\mu(\Omega) < +\infty$. Beweise:

   a) Falls $f_n(\omega) \to f(\omega)$ fast überall, dann $f_n \to f$ im Mass.

   b) Falls $f_n \to f$ im Mass, dann existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n\geq 1}$, welche fast überall punktweise gegen f konvergiert.

3) Es bezeichne λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$. Finde jeweils eine Folge messbarer Funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

   a) $f_n \to 0$ gleichmässig, aber nicht in $L^1(\lambda)$.

   b) $f_n \to 0$ punktweise und im Mass, aber nicht in $L^1(\lambda)$ und auch nicht gleichmässig.

   c) $f_n \to 0$ punktweise, aber nicht im Mass.

   d) $f_n(x)$ divergiert für alle $x \in (0, 1)$, aber trotzdem $f_n \to 0$ im Mass.

4) Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume.

   a) Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$F \colon V \to W$$

genau dann stetig ist wenn

$$\|F\| := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|F(v)\|_W}{\|v\|_V} < \infty$$

gilt. In diesem Fall sagt man auch: F ist beschränkt.

b) Sei $B(V, W) = \{F : V \to W \text{ linear} \mid \|F\| < \infty\}$ der Raum der beschränkten linearen Abbildungen. Zeige: $(B(V, W), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum. Falls W ein Banachraum ist, so ist $B(V, W)$ sogar ein Banachraum.

5) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, und $U \subseteq H$ ein Untervektorraum. Das *orthogonale Komplement* $U^\perp$ von U ist definiert als

$$U^\perp := \{w \in H \,|\, \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } v \in U\}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

a) $U^\perp \subset H$ ist ein (topologisch) abgeschlossener Untervektorraum. Ferner gilt

$$(\bar{U})^\perp = U^\perp,$$

und

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

b) Ist U abgeschlossen, so gilt

(1) $$H = U \oplus U^\perp$$

und ausserdem

$$U = (U^\perp)^\perp.$$

Allgemein gilt

$$\bar{U} = (U^\perp)^\perp.$$

Finde auch ein Gegenbeispiel zu (1), falls U *nicht* abgeschlossen ist.

Hinweis: Verwende Theorem 4.27 im Buch.

c) Zeige mittels b) (nochmals) den **Satz von Riesz:** Sei $\Lambda \colon H \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Funktion. Dann existiert ein eindeutiges Element $y \in H$ so dass

$$\Lambda(\cdot) = \langle y, \cdot \rangle.$$

Hinweis: Wähle $U = \ker \Lambda$ in b).