1) Beweise: Gilt in einem reellen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

so ist V ein Prähilbertraum, d.h. die Norm wird von einem Skalarprodukt erzeugt.

Hinweis: Definiere $\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ für alle $x, y \in V$.

2) Es sei m das Lebesgue-Mass auf $(0,1)$ und $\#$ das Zählmass auf der σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen in $(0,1)$. Zeige, dass

   a) $\#$ bezüglich m keine Lebesgue-Zerlegung besitzt.
   b) obwohl $m \ll \#$ gilt und m beschränkt ist, existiert kein $f \in L^1(\#)$, so dass $dm = f\, d\#$.

3) Sei $X = [1, \infty)$, $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra von X und $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Mass. Sei $\lambda\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ ein Borel-Mass mit

$$\lambda(B) = \alpha \cdot \lambda(\alpha B), \quad \forall \alpha \geq 1,\ B \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

   a) Zeige, dass $\lambda(X) < \infty$ gilt und dass es unter der zusätzlichen Annahme $\lambda \ll \mu$ eine reelle Zahl $c \geq 0$, gibt so dass

$$\lambda(B) = \int_B f\, d\mu,\ \forall B \in \mathcal{B},$$

   wobei $f\colon X \to [0,\infty)$ definiert ist als $f(x) = c/x^2$.
   b) **Challenge:** Zeige, dass $\lambda \ll \mu$ für jedes Borel-Mass mit (1) gilt.

4) a) Beweise:

Theorem (Satz von Egoroff)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ ein Folge von messbaren Funktionen, die punktweise fast überall gegen $f \colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Fixiere eine Konstante $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine messbare Menge $E \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ gilt und $f_n\big|_E$ gleichmässig gegen $f\big|_E$ konvergiert.*

Hinweis: Definiere

$$S(n,k) := \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in X \,\middle|\, |f_m(x) - f(x)| \geq 1/k \right\}, \quad k,\, n \in \mathbb{N},$$

und zeige

$$\lim_{n \to \infty} \mu(S(n,k)) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Schliesse daraus, dass es eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$E := \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S(n_k, k) \right)^c$$

die gewünschten Eigenschaften besitzt.

b) Zeige, dass der Satz von Egoroff nicht für σ-endliche Massräume gilt.

5) Ziel der Aufgabe ist es, den **Satz von Vitali** zu beweisen. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Eine Untermenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ heisst **gleichgradig integrierbar**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A) < \delta \implies \left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Theorem (Satz von Vitali)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(X) < \infty$, $f \colon X \to \mathbb{R}$ messbar, und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu)$, die gleichgradig integrierbar ist und punktweise fast überall gegen f konvergiert.*

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

Hinweis: Verwende die gleichgradige Stetigkeit und den Satz von Egoroff um das Integral $\int_X |f_n - f| \, d\mu$ geschickt aufzuspalten. Für einen der Terme kann Fatou's Lemma hilfreich sein.