1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeige, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2) Es sei X eine überabzählbare Menge und definiere die σ-Algebra

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset X \,\middle|\, A \text{ ist höchstens abzählbar oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar } \right\}.$$ [1]

Zeige, dass $\mu \colon \mathcal{A} \to [0,1]$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar;} \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ definiert. Welche Funktionen $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind $\mathcal{A}$-messbar?

3) Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

a) Es sei μ ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Wie kann man auf natürliche Weise ein Bildmass $f_*\mu$ auf Y definieren?

Hinweis: Benutze Aufgabe 2 aus Serie 1.

b) Es sei $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Mass auf X und es sei $B \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge. Wir definieren die Funktion $\mu\big|_B \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ via

$$A \mapsto \mu\big|_B(A) := \mu(A \cap B).$$

Zeige, dass Abbildung $\mu\big|_B$ wohldefiniert und ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ ist.

[1] Siehe Serie 1, Aufgabe 1b).

4) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f, g\colon X \to [0, +\infty)$ messbare Funktionen. Es gelte

$$\int\limits_A f \, d\mu \leq \int\limits_A g \, d\mu < +\infty$$

für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass es eine Menge $M \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(M^c) = 0$ und

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in M.$$

5) Sei $\mu\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ das Zählmass:

$$\mu(A) := \#A, \quad A \subset \mathbb{N}.$$

a) Zeige, dass für eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{N} \to [0, \infty]$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

gilt.

b) Sei $f_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$, $j \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen und

$$f(k) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind:[2]

- Es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_j \, d\mu,$$

für eine beliebige Funktionenfolge f_j und f wie oben.
- Für eine beliebige Funktion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, +\infty]$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

[2]Theorem 1.38 besagt, dass die erste Aussage wahr ist. Dass die zweite Aussage wahr ist wissen Sie aus der Analysis. Die Aufgabe ist jedoch unabhängig davon zu lösen, ob eine der beiden Aussagen wahr ist, d.h., zeigen Sie die Äquivalenz direkt.