D-MATH	**Mass und Integral**	**ETH Zürich**
Prof. Thomas Willwacher	Serie 3	FS 2022

1) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Zeige:

   a) Für (A_k) eine Folge messbarer Mengen gilt

   $$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

   b) Für (B_k) eine Folge messbarer Mengen mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) < +\infty$, liegen fast alle Punkte $x \in X$ in höchstens endlich vielen B_k.

2) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \in L^1(\mu)$ eine integriarbare Funktion. Beweise folgende Aussage:

   Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ folgende Ungleichung gilt:

   $$\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

3) In dieser Aufgabe gilt es folgendes Theorem (monotone Konvergenz für absteigende Folgen) auf zwei verschieden Arten zu beweisen:

   Theorem. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f_k \colon X \to [0, \infty)$ eine Folge messbarer positiver Funktionen, so dass*

   $$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0.$$

   Sei $f \colon X \to [0, \infty)$ der punktweise Grenzwert von f_k. Falls $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist, dann gilt

   $$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

   a) Zeige das obige Theorem mit Hilfe des Satzes über monotone Konvergenz.

b) Zeige das obige Theorem mit Hilfe des Satzes über die majorisierte Konvergenz.

c) Finde ein Gegenbeispiel zur Schlussfolgerung im obigen Theorem, wenn die Annahme $f_1 \in L^1(\mu)$ *nicht* erfüllt ist.

4) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum, i.e.

$$\mu(X) < +\infty.$$

Sei $f_k \colon X \to \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter messbarer Funktionen, die gleichmässig gegen ein $f \colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Beweise oder widerlege die Aussage:

“Die Funktion f ist messbar und es gilt

$$\lim_{k \to +\infty} \int\limits_X f_k \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu.\text{”}$$

Was geschieht im Allgemeinen falls $\mu(X) = \infty$?

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und

$$f = u + iv \colon X \to \mathbb{C}$$

eine Funktion. Wir betrachten $\mathbb{C}$ als messbaren Raum ausgestattet mit der Borel σ-Algebra.

a) Zeige, dass f messbar ist genau dann wenn $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ messbar sind.

b) Eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{C}$ heisst integrierbar, falls

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty$$

gilt. Zeige, dass f wie oben integrierbar ist genau dann wenn u und v integrierbar sind.

c) Für eine integrierbare Funktion f wie oben definieren wir

$$\int_X f \, d\mu := \int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

Zeige:

i)

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

und

ii)

$$\int_X (f + c \cdot g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + c \cdot \int_X g \, d\mu,$$

für alle integrierbaren Funktionen $f,\ g\colon X \to \mathbb{C}$ und alle $c \in \mathbb{C}$.