D-MATH	**Mass und Integral**	**ETH Zürich**
Prof. Thomas Willwacher	Serie 4	FS 2022

1) Es sei $(X, \mathcal{A})$ eine messbarer Raum und $\mu_n\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Folge von Massen.

   a) Zeige, dass
   $$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$
   ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ definiert.

   b) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Zeige, dass f μ-integrierbar ist, i.e.
   $$\int_X |f| \, d\mu < \infty,$$
   genau dann wenn
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f| \, d\mu_n < \infty.$$

   c) Sei f μ-integrierbar. Zeige, dass
   $$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \, d\mu_n.$$

2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Massraum. Zeige, dass $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seine eigene Vervollständigung ist.

3) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Massraum, $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ seine Vervollständigung und $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Massraum, so dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$. Zeige, dass dann $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{B}$ und $\nu|_{\mathcal{A}^*} = \mu^*$ gilt.

4) a) Beschreibe jeweils explizit die Vervollständigung $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ der folgenden Massräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$:

   i) X eine beliebige Menge, $\mathcal{A} \subseteq X$ eine σ-Algebra und μ das Zählmass,

ii) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ die Borel σ-Algebra und $\mu = \delta_0$ und das Dirac Mass bei $0 \in \mathbb{R}$,

iii) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ wie in Serie 2, Aufgabe 2).

b) Beschreibe jeweils explizit die $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ Räume für i), ii), iii). Verifiziere für ii), dass $L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \cong L^1(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ gilt.

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \overset{\mu}{\sim} g$ definiert wie in (1.35) im Skript.

a) Zeige, dass $\overset{\mu}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Seien $f,\, g\colon X \to [0, \infty]$ μ-integrierbar mit

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Zeige, dass $f = g$ fast überall (i.e. $f \overset{\mu}{\sim} g$) gilt.

c) Gilt die Aussage in b) auch für messbare Funktionen, die nicht zwingend integrierbar sind? Begründe deine Antwort.