D-MATH	**Mass und Integral**	**ETH Zürich**
Prof. Thomas Willwacher	Serie 5	FS 2022

1) Beweise die folgende Aussage: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesgue Nullmenge genau dann, wenn eine Folge $(Q_k)_{k\geq 1}$ von Quadern in $\mathbb{R}^n$ existiert, so dass

   1. $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_k) < +\infty$.
   2. Jeder Punkt von A liegt in unendlich vielen der Quader Q_k.

2) Es sei $\Omega := [0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall versehen mit der Standardtopologie und $A \subset \Omega$ eine Teilmenge. Weiter bezeichne ν das äussere Lebesgue Mass auf Ω. Beweise oder widerlege jeweils folgende Aussagen:

   i) Ist A nirgends dicht, so gilt $\nu(A) = 0$.

   ii) Ist $\nu(A) = 0$, so ist A nirgends dicht.

   iii) Ist A dicht, so gilt $\nu(A) > 0$.

   iv) Ist $\nu(A) > 0$, so existiert ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subset [0,1]$, in welchem $A \cap I$ dicht liegt.

   v) Ist $\nu(A) = 1$, so ist A dicht in $[0,1]$.

3) Es sei $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen so dass $\gamma_k \leq 3^{-k}$. Man zerlege das Einheitsintervall $[0,1]$ in drei disjunkte Intervalle I_0, I_1, I_2, wobei das zentrierte mittlere Intervall I_1 offen ist und die Länge γ_1 hat. Man zerlege nun jedes Intervall I_{a_1}, für $a_1 = 0, 2$, in drei Teilintervalle $I_{a_1 0}, I_{a_1 1}, I_{a_1 2}$, wobei das zentrierte mittlere Intervall $I_{a_1 1}$ offen ist und die Länge γ_2 hat. Ebenso verfahre man mit $I_{a_1 a_2}$ $(a_1, a_2 = 0, 2)$ usw.

   Es bezeichne G die Vereinigung aller offenen mittleren Intervalle

   $$I_1, I_{01}, I_{21}, I_{001}, \ldots,$$

   und $C = [0,1] \setminus G$ die allgemeine Cantormenge.

a) Zeige: C ist abgeschlossen, nirgends dicht und hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$.

b) Berechne des Lebesgue-Mass von C.

4) Zeige den Satz von Cantor:

Theorem (Cantor 1890)**.** *Sei X eine beliebige Menge. Dann hat die Potenzmenge 2^X grössere Mächtigkeit als X, i.e. es existiert eine injektive Abbildung$i : X \to 2^X$, aber keine surjektive Abbildung $f : X \to 2^X$.*

Gehe wie folgt vor:

a) Konstruiere eine injektive Abbildung $i \colon X \to 2^X$.

b) Nimm an es gibt eine surjketive Abbildung $f : X \to 2^X$ und leite einen Widerspruch her – betrachten Sie dazu die Menge $B = \{x \in X \,\big|\, x \notin f(x)\}$

5) a) Zeige, dass die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ die gleiche Mächtigkeit hat wie $\mathbb{R}$.

b) Zeige, dass nicht Borel-messbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ existieren. **Hinweis:** Nach dem Satz von Cantor (siehe Aufgabe 4) hat für jede Menge X die Potenzmenge 2^X grössere Mächtigkeit als X.

c) Zeige, dass Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ existieren, die Lebesgue- aber nicht Borel-messbar sind.