D-MATH	**Mass und Integral**	**ETH Zürich**
Prof. Thomas Willwacher	Serie 6	FS 2022

1) Bestimme den Grenzwert der Folgen

   a) $a_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{\frac{x}{2}}\, dx$ mittels majorisierter Konvergenz,

   b) $b_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{-2x}\, dx$ mittels monotoner Konvergenz.

2) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und ν das äussere Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$. Zeige folgende Aussagen:

   a) Es exisitert eine G_δ-Menge B so dass $B \supset A$ und $\nu(A) = \nu(B)$.[1]

   b) Ist A Lebesgue-messbar, dann existiert eine F_σ-Menge C so dass $C \subseteq A$ und $\nu(A) = \nu(C)$.[2]

3) Zeige, dass jede Teilmenge $A \subseteq V$ eines echten Untervektorraumes $V \subsetneq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Mass 0 hat.

4) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **Jordan-messbar** falls die charakteristische Funktion $\chi_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar ist.

   a) Finde eine Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, die nicht Borel-messbar ist.

   b) Finde eine beschränkte Lebesgue-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, die weder Jordan- noch Borel-messbar ist und positives Lebesgue-Mass hat.

5) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $\nu \colon 2^X \to [0, \infty]$ definiert als

$$\nu(B) := \inf \left\{ \mu(A) \,\middle|\, A \supseteq B,\ A \in \mathcal{A} \right\}.$$

[1] Zur Erinnerung: B ist eine G_δ-Menge, wenn B als abzählbarer Schnitt von offenen Mengen geschrieben werden kann.

[2] Zur Erinnerung: C ist eine F_σ-Menge, wenn C als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann.

a) Zeige, dass ν ein äusseres Mass definiert und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\nu)$.

b) Sei zusätzlich $\mu(X) < \infty$. Zeige, dass der Massraum $\left(X, \mathcal{A}(\nu), \nu\big|_{\mathcal{A}(\nu)}\right)$ gleich der Vervollständingung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist.

Hinweis: Zeige, dass für jedes $B \subseteq X$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $A \supseteq B$ und $\nu(B) = \mu(A)$.

c) Sei X eine Menge und $A \subsetneq X$ nichtleer. Definiere

$$\mathcal{A} := \{\emptyset,\, A,\, A^c,\, X\}\,,\ \mu(\emptyset) := \mu(A) := 0,\ \mu(A^c) := \mu(X) := \infty.$$

i) Für $B \subseteq X$ gilt

$$\nu(B) = \begin{cases} 0, & \text{falls } B \subseteq A, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii) Berechne die Vervollständigung $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ und $\mathcal{A}(\nu)$.

iii) Schliesse, dass die Annahme $\nu(X) < \infty$ in b) notwendig ist.