1) Sei (X,ρ) ein metrischer Raum und fixiere $d \geq 0$ eine reelle Zahl. Für $\varepsilon > 0$ definiere die Funktion

$$\nu_{d,\varepsilon}\colon 2^X \longrightarrow [0,\infty]$$

als

$$\nu_{d,\varepsilon}(A) := \inf\left\{ \sum_{i\in I} \operatorname{diam}(D_i)^d \;\middle|\; \begin{array}{l} I \text{ höchstens abzählbar }, D_i \subseteq X, \\ \operatorname{diam}(D_i) < \varepsilon \,\forall i \in I,\ A \subseteq \cup_{i\in I} D_i \end{array} \right\}.$$ [1]

Das **äussere Hausdorff Mass** $\nu_d\colon 2^X \to [0,\infty]$ ist definiert als

$$\nu_d(A) := \sup_{\varepsilon>0} \nu_{d,\varepsilon}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \nu_{d,\varepsilon}(A), \quad A \subseteq X.$$

a) Zeige, dass ν_d ein äusseres Mass ist,

b) Zeige, dass für zwei Mengen A, $B \subseteq X$ mit

$$\rho(A,B) := \inf_{(x,y)\in A\times B} \rho(x,y) > 0$$

folgendes gilt:

$$\nu_d(A \cup B) = \nu_d(A) + \nu_d(B).$$

Schliesse, dass $\mathcal{A}(\nu_d)$ eine σ-Algebra ist, die die σ-Borel algebra $\mathcal{B}_X$ enthält.[2]

c) Zeige, dass für $d = 0$ gilt: $\mathcal{A}(\nu_0) = 2^X$ und ν_0 ist das Zählmass.

2) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige und injektive Abbildung und $\nu_1\colon 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$ das äussere Hausdorff Mass auf $\mathbb{R}^n$. Die *Länge* von γ ist definiert als

$$L(\gamma) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)) \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\, a \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq b \right\}$$

---

[1] Zur Erinnerung:

$$\operatorname{diam}(B) = \sup_{x,y\in B} \rho(x,y).$$

[2] Das Mass $\mu_d := \nu_d\big|_{\mathcal{A}(\nu_d)}$ wird auch das **d-dimensionale Hausdorff Mass** genannt.

Zeige, dass

$$\nu_1(\mathrm{im}(\gamma)) = L(\gamma).$$

3) Sei C die (tertiäre) Cantormenge in $[0,1]$. Wir definieren die Cantorfunktion $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ wie folgt:

$$\psi(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}, & \text{falls } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in C,\ a_i \in \{0,2\}, \\ \sup\limits_{y \in C,\, y \leq x} \psi(y), & \text{falls } x \notin C. \end{cases}$$

a) Zeige, dass ψ wohldefiniert, stetig, monoton steigend und surjektiv ist.

b) Sei

$$\phi\colon [0,1] \to [0,2], \quad x + \psi(x).$$

Zeige, dass ϕ streng monoton steigend ist und ein Homoömorphismus ist.

c) Zeige, dass $\phi(C)$ messbar ist und $m(\phi(C)) = 1$.

Hinweis: Welches Mass haben die Bilder der in der Definition von C entfernten Intervalle?

d) Zeige, dass eine Lebesgue-messbare Menge $E \subset [0,1]$ existiert, so dass $\phi(E)$ *nicht* messbar ist. Folgere, dass auch Urbilder von Lebesgue-messbaren Mengen unter stetigen Funktionen nicht unbedingt wieder Lebesgue-messbar sein müssen.

Hinweis: Wende Lemma 2.15 im Skript auf $\phi(C)$ an.

4) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ reell und $f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $t \in [a,b]$. Nehme zusätzlich an, dass $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ für alle x und t existiert und ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ existiert, so dass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq g.$$

a) Zeige, dass

$$\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\, d\mu = \frac{\partial}{\partial t} \int_X f(\cdot, t)\, d\mu, \quad \forall t \in [a,b].$$

b) Berechne

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dm$$

für

i)

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n},$$

ii)

$$f_n(x) = \frac{x\log(x)}{1+n^2x^2}.$$

5) Sei

$$\chi_r := \chi_{[-r,r]^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst **uneigentlich Riemann integrierbar**, falls für alle $r > 0$ die Funktion $f\chi_r$ Riemann integrierbar ist, und der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_r(x)\,dx =: R(f) \in \mathbb{R}$$

existiert.

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann integrierbar, so dass $R(|f|) < \infty$. Zeige, dass dann $f \in \mathcal{L}^1(m)$, und ferner $R(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dm$ gilt.

b) Finde eine uneigentlich Riemann integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass f *nicht* Lebesgue integrierbar ist.

c) Gibt es eine uneigentlich Riemann integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass f auch Lebesgue integrierbar ist, aber $R(f) \neq \int_{\mathbb{R}^n} f\,dm$?