1) Seien $(X,\mathcal{U}_X)$ und $(Y,\mathcal{U}_Y)$ zwei topologische Räume. Wir definieren eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset 2^{X\times Y}$ so dass

$$A \in \mathcal{U} \iff A = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$$

für Familien von offenen Mengen $U_i \in \mathcal{U}_X$, $V_i \in \mathcal{U}_Y$ für $i \in I$, und I einer Indexmenge.

Bemerkung: Man kann rechts auch expliziter schreiben

$$A = \bigcup_{\substack{U\times V\subset A \\ U\in\mathcal{U}_X, V\in\mathcal{U}_Y}} U \times V.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{U}$ eine Topologie auf $X \times Y$ ist. Wir nennen

$$\mathcal{U}_{X\times Y} := \mathcal{U}$$

die **Produkttopologie**.

b) Zeige, dass $\mathcal{U}$ die kleinste Topologie auf $X \times Y$ ist, sodass die Projektionen

$$\pi_X : X \times Y \to X$$

und

$$\pi_Y : X \times Y \to Y$$

stetig sind.

2) Sei X ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann gilt

i) Jede geschlossene Teilmenge von K ist kompakt.

ii) Falls X Hausdorff ist und $y \in X \setminus K$, dann gibt es *disjunkte* offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $K \subseteq U$ und $y \in V$.

iii) Falls X Hausdorff ist, dann ist K geschlossen. Finde ein Gegenbeispiel, falls X nicht Hausdorff ist.

3) *Erinnerung Topologie:*

Sei $(X, \mathcal{U}_X)$ ein topologischer Raum. Dann ist eine *Umgebung* von einem Punkt $x \in X$ eine Menge $A \subset X$, die eine offene Menge $U \in \mathcal{U}_X$ enthält, die wiederum x enthält: $x \in U \subset A \subset X$.

Ein Raum heisst **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

$(X, \mathcal{U}_X)$ heisst **erstabzählbar**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine höchstens abzählbare Menge von Umgebungen $U_1, U_2, \ldots$ von x gibt, so dass für jede Umgebung V von x ein k existiert mit $U_k \subset V$.

$(X, \mathcal{U}_X)$ heisst **zweitabzählbar**, wenn es eine höchstens abzählbare Menge von offenen Mengen $U_1, U_2, \ldots$ gibt, so dass sich jede offene Menge $U \in \mathcal{U}_X$ als Vereinigung von Mengen U_k schreiben lässt.

$(X, \mathcal{U}_X)$ heisst separabel, wenn eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset X$ existiert, so dass $\bar{A} = X$.

a) Zeige, dass jeder metrische Raum ein erstabzählbarer Hausdorffraum ist. Ist er zudem separabel, so ist er auch zweitabzählbar, und umgekehrt.

b) Die Räume $\mathbb{R}^n$ sind zweitabzählbar, lokal kompakt und separabel. Zeige, dass

$$\mathbb{R}^\infty = \left\{(a_1, a_2, \ldots) \,\middle|\, a_j = 0 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}\right\}$$

mit dem üblichen l^2-Skalarprodukt, nicht lokal kompakt ist.

4) Sei X lokal kompakt und Hausdorff, und $K, U \subseteq X$ mit K kompakt, U offen und $K \subseteq U$. Zeige, dass es eine offene Menge $V \subseteq X$ gibt, sodass

$$K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U.$$

5) Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, m)$ der Lebesgue-Massraum und

$$\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ein C^1-Diffeomorphismus. Zeige

$$\phi_* \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

und beweise

$$\left(\phi_* m\right)(A) = \int_A \frac{1}{|\det(d\phi) \circ \phi^{-1}|}\, dm, \quad \forall A \in \mathcal{A}.^{1}$$

[1]Zur Erinnerung: $\phi_*\mathcal{A}$ (resp. $\phi_* m$) ist definiert wie in Serie 1, Aufgabe 2 b) (resp. Serie 2, Aufgabe 3 a)).